

Piani nello spazio cartesiano

In questa lezione abbiamo scritto alcune equazioni associandole ognuna al relativo piano nello spazio cartesiano:

PIANI NELLO SPAZIO

$z = z$ piano parallelo al piano xy .
 $x = -1$ " " " " yz .

$y = zx$ piano parallelo all'asse z (che passa per l'asse z)
 $z = 2x + 1$ " " " y

$z = 2x - y + 2$ piano non parallelo a nessun asse.

$z = mx + ny + q$ FORMA ESPlicita DELL'equAZIONE DEL PIANO NELLO SPAZIO.

Abbiamo constatato che i piani paralleli all'asse z non possono essere espressi mediante l'equazione esplicita, poiché nell'equazione manca z .

Come succede per le rette nel piano, anche per i piani nello spazio, l'equazione implicita, meno comoda di quella esplicita, ha però il vantaggio di essere completa, perché comprende TUTTI i piani (anche quelli paralleli all'asse z). Quindi, se devo determinare l'equazione di un piano per tre punti A, B, C (come nell'esempio seguente) è conveniente utilizzare la forma implicita:

È opportuno e conveniente utilizzare la forma implicita.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$A(1; 0; 0)$ $B(0; -3; 1)$ $C(2; -2; 0)$

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ -3b + c + d = 0 \\ 2a - 2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -d \\ \text{idem} \\ -2d - 2b + d = 0 \end{cases}$$

[Ingrandisci pagina](#)

Completando il sistema $\begin{cases} a+d=0 \\ -3b+c+d=0 \\ 2a-2b+d=0 \end{cases}$ si trova: $\begin{cases} a=-d \\ b=-\frac{1}{2}d \\ c=-\frac{5}{2}d \end{cases}$ quindi:

$$-dx - \frac{1}{2}dy - \frac{5}{2}dz + d = 0 \quad \text{da cui, dividendo per } -d: \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z - 1 = 0$$

Cioè (moltiplicando per 2): $2x + y + 5z - 2 = 0$ che, in forma esplicita, è: $z = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}$

Il libro di testo tratta l'argomento a pag. 7 e 8 e i relativi esercizi sono a pag.61

Riassumendo:

L'equazione generale, in **forma implicita**, di un piano nello spazio cartesiano è: **$ax + by + cz + d = 0$**

Se $c \neq 0$ essa si può esplicitare ottenendo: $z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$

cioè un'equazione del tipo: **$z = mx + ny + q$** (equazione del piano in **forma esplicita**)

che è quindi una **funzione di due variabili $z = f(x; y)$ lineare** cioè di primo grado

Osserviamo che, se $c = 0$, si ottiene un piano parallelo all'asse z e in tal caso il piano non è esprimibile mediante un'equazione esplicita del tipo $z = mx + ny + q$ (analogamente nel caso del piano cartesiano le rette del tipo $x = k$ non sono esprimibili con equazioni esplicitate $y = mx + q$).

Quindi **la forma esplicita rappresenta tutti i piani con esclusione di quelli paralleli all'asse z .**

Osserviamo anche che: **una qualunque funzione di due variabili lineare ha come superficie associata un piano non parallelo all'asse z , le cui linee di livello sono tutte rette parallele fra di loro.**

([vedi esercizio 3 sulle linee di livello](#))

L'altra osservazione che possiamo fare, osservando una funzione di due variabili lineare, è che $z = mx + ny + q$ ha **due coefficienti angolari**, uno rispetto a x e uno rispetto a y , tale osservazione ci permette di immaginare che le funzioni di due variabili abbiano **due derivate** (una rispetto a x e una rispetto a y).... Il prossimo argomento sarà infatti quello delle **derivate parziali**

DOMANDA 1

Data l'equazione di un piano in forma implicita:

$$ax + by + cz + d = 0$$

quali sono le caratteristiche del piano se:

- A) $d = 0$
- B) $a = 0$
- C) $a = 0$ e $d = 0$
- D) $a = 0$ e $b = 0$
- E) $b = 0$ e $c = 0$

DOMANDA 2

Qual è l'equazione:

- A) del piano xy
- B) del piano xz
- C) del piano yz

DOMANDA 3

L'equazione $x - 2y + 3z - 5 = 0$

è l'equazione di un piano non passante per l'origine e non parallelo agli assi coordinati;

- A) e l'equazione $x - 2y + 4 = 0$?
- B) e l'equazione $x + 3 = 0$?

DOMANDA 4

Determina l'equazione del piano passante per i punti

$$P_1 (2; 5; -2) \quad P_2 (0; 3; 4) \quad P_3 (1; 0; 8)$$

Una retta nello spazio si può ottenere come intersezione di due piani non paralleli.

In particolare l'asse x si ottiene come soluzione del sistema $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

DOMANDA 5

Come si può determinare l'asse y ?

DOMANDA 6

Come si può determinare l'asse z ?

DOMANDA 7

Qual è l'equazione generica di un piano

- A) parallelo al piano xy ?
- B) parallelo al piano xz ?
- C) parallelo al piano yz ?

RISPOSTE ALLE DOMANDE ([da confrontare solo dopo aver risposto 😊 !!](#))