Esercizio sulla determinazione del massimo assoluto e del minimo assoluto
di una funzione di due variabili vincolata

Abbiamo utilizzato:

- il metodo della sostituzione ricavando y dal vincolo e sostituendolo alla funzione
- il metodo della sostituzione ricavando x dal vincolo e sostituendolo alla funzione e all'ulteriore vincolo
- il metodo grafico disegnando il vincolo e le linee di livello della funzione

---

$$z = x^2 + y^2 - 6x$$

VINCOLO $\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 0 \le x \le 5 \end{cases}$

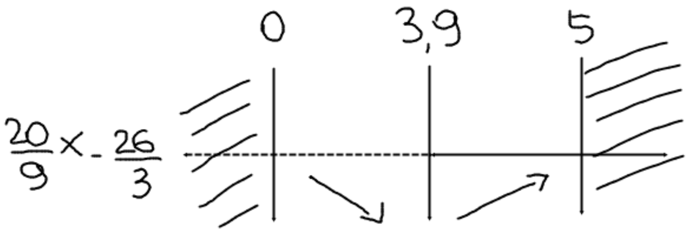
METODO DELLA SOSTITUZIONE ESPLICITANDO y

$$\frac{3y}{3} = \frac{-x}{3} + \frac{12}{3} \qquad z = x^2 + \left(-\frac{1}{3}x + 4\right)^2 - 6x$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 4 \qquad z = x^2 + \frac{1}{9}x^2 + 16 - \frac{8}{3}x - 6x$$

$$z = \frac{10}{9}x^2 - \frac{26}{3}x + 16$$

$$z' = \frac{20}{9}x - \frac{26}{3} \qquad z' = 0 \Rightarrow \frac{39}{10}$$



$$\boxed{m\left(\frac{39}{10}; \frac{27}{10}\right) \quad z = -\frac{9}{10}}$$

MINIMO ASSOLUTO

PER DETERMINARE IL MASSIMO ASSOLUTO
CONFRONTIAMO I VALORI ASSUNTI DA z PER x=0 E x=5

$f(0;4)$ $z = 16$

$f\left(5; \frac{7}{3}\right)$ $z = \frac{4}{9}$

DAL CONFRONTO RISULTA
CHE IL MASSIMO ASSOLUTO
È $z = 16$ NEL PUNTO $(0;4)$

• METODO DELLA SOSTITUZIONE ESPLICITANDO x

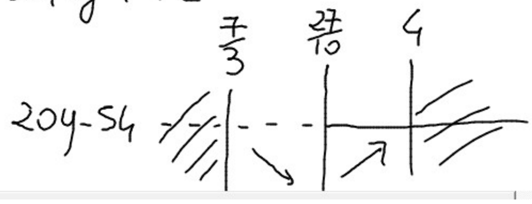
$z = x^2 + y^2 - 6x$

Vincolo $\begin{cases} x+3y-12=0 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y+12 \\ x \geq 0 \\ x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y+12 \\ -3y+12 \geq 0 \\ -3y+12 \leq 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3y+12 \\ y \leq 4 \\ y \geq \frac{7}{3} \end{cases}$ $\quad 7/3 \leq y \leq 4 \quad$ $z = (-3y+12)^2 + y^2 - 6(-3y+12)$

$z = 10y^2 - 54y + 72$

$z' = 20y - 54$



• MINIMO ASSOLUTO PER $y = \frac{27}{10} \Rightarrow x = -3\left(\frac{27}{10}\right) + 12 = \frac{39}{10}$

$m = \left(\frac{39}{10}; \frac{27}{10}\right) \quad z = -\frac{9}{10}$

• MASSIMO

$\left(5; \frac{7}{3}\right) \quad z = \frac{4}{9}$

$(0;4) \quad z = 16$

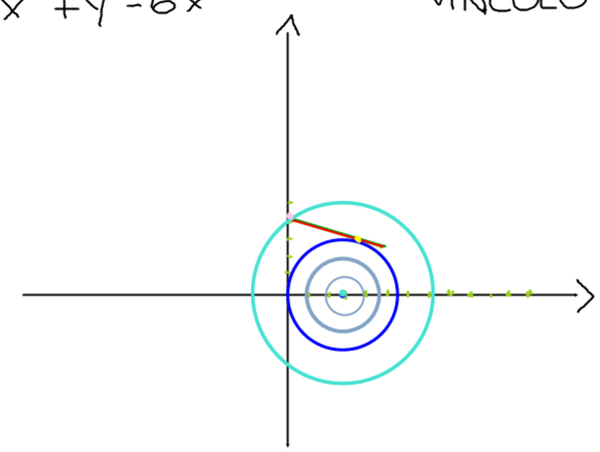
DAL CONFRONTO RISULTA CHE IL MASSIMO ASSOLUTO È

$M(0;4) \quad z = 16$

RISOLUZIONE CON IL METODO GRAFICO

$z = x^2 + y^2 - 6x$

VINCOLO $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 4 \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$



IL VINCOLO È IL SEGMENTO DISEGNATO IN ROSSO I CUI ESTREMI SONO $(0;4)$ E $\left(5; \frac{7}{3}\right)$

LE LINEE DI LIVELLO SONO CIRCONFERENZE CONCENTRICHE CON CENTRO $(3;0)$ E RAGGIO CRESCENTE AL ALL'AUMENTARE DI z.

Il massimo assoluto si trova in corrispondenza dell'ultima linea di livello che incontra il vincolo al crescere di z quindi il MASSIMO ASSOLUTO È in corrispondenza del punto (0;4) ed è $z=16$

Il <u>minimo assoluto</u> si trova in corrispondenza della <u>prima</u> linea di livello che incontra il vincolo che <u>in questo caso</u> (ma non sempre) è la linea di livello tangente al vincolo

Per determinarla metto a sistema la retta del vincolo con la linea di livello generica e pongo Δ=0

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x=K \\ y=-\frac{1}{3}x+4 \\ \Delta=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+\left(-\frac{1}{3}x+4\right)^2-6x-K=0$$

$$x^2+\frac{1}{9}x^2+16-\frac{8}{3}x-6x-K=0$$

$$\frac{10}{9}x^2-\frac{26}{3}x+16-K=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow \left(-\frac{26}{3}\right)^2-\frac{40}{9}(16-K)=0$$

$$\frac{676}{9}-\frac{640}{9}+\frac{40}{9}K=0 \Rightarrow \frac{40}{9}K=-\frac{36}{9} \Rightarrow K=-\frac{36}{40}$$

$K=-\frac{9}{10}$ minimo assoluto

per trovare i valori di x e y sostituisco nell'equazione risolvente

$$\frac{10}{9}x^2-\frac{26}{3}x+16+\frac{9}{10}=0$$

devo trovare un quadrato

$$\frac{10}{9}x^2-\frac{26}{3}x+\frac{169}{10}=0$$

$$\frac{100}{9}x^2-\frac{260}{3}x+169=0$$

$$\left(\frac{10}{3}x-13\right)^2=0 \Rightarrow x=\frac{39}{10}$$

Per determinare y sostituisco nel vincolo

$$y=-\frac{1}{3}\left(\frac{39}{10}\right)+4=\frac{27}{10}$$

QUINDI IL PUNTO È $\left(\frac{39}{10};\frac{27}{10}\right)$

$z=-\frac{9}{10}$