MATURITA’ 1990 sessione ordinaria es. n 2 (pag.139 n.73)

Un'impresa deve decidere la propria politica di acquisto di una materia prima, per la quale prevede un consumo uniforme nel tempo. Essa abbisogna di 12.000 Kg al mese di materia prima che acquista a 200 Lire al Kg. Il costo fisso di ogni ordinazione è di 10.000 Lire e le spese di magazzinaggio ammontano a 5 Lire al Kg/giorno (anno commerciale di 360gg.).
La ditta fornitrice concede uno sconto del 2% per ordinazioni di almeno 10.000 Kg e del 3% per ordinazioni di almeno 40.000 Kg
Determinare la quantità ottimale di merce da ordinare per avere un costo minimo di gestione delle scorte.
Formulare e studiare il modello matematico della gestione di magazzino descrivendo, attraverso una breve trattazione teorica, le ipotesi fatte.

X = lotto economico (quantità, in Kg, che ordinare ogni volta)

FABBISOGNO = 12'000 Kg al mese

Costo = 200 al Kg

costo ord. S = 10'000

spese magazzinaggio s = 5 al Kg. al giorno

sconto 2% per ord. con $x \geq 10'000$

sconto 3% " " $x > 40'000$

NB. Il problema si può risolvere anche considerando come periodo di riferimento il MESE i costi saranno quindi mensili, anziché annuali, ma il lotto economico rimarrà uguale

CONSIDERANDO COME PERIODO DI RIFERIMENTO L'ANNO

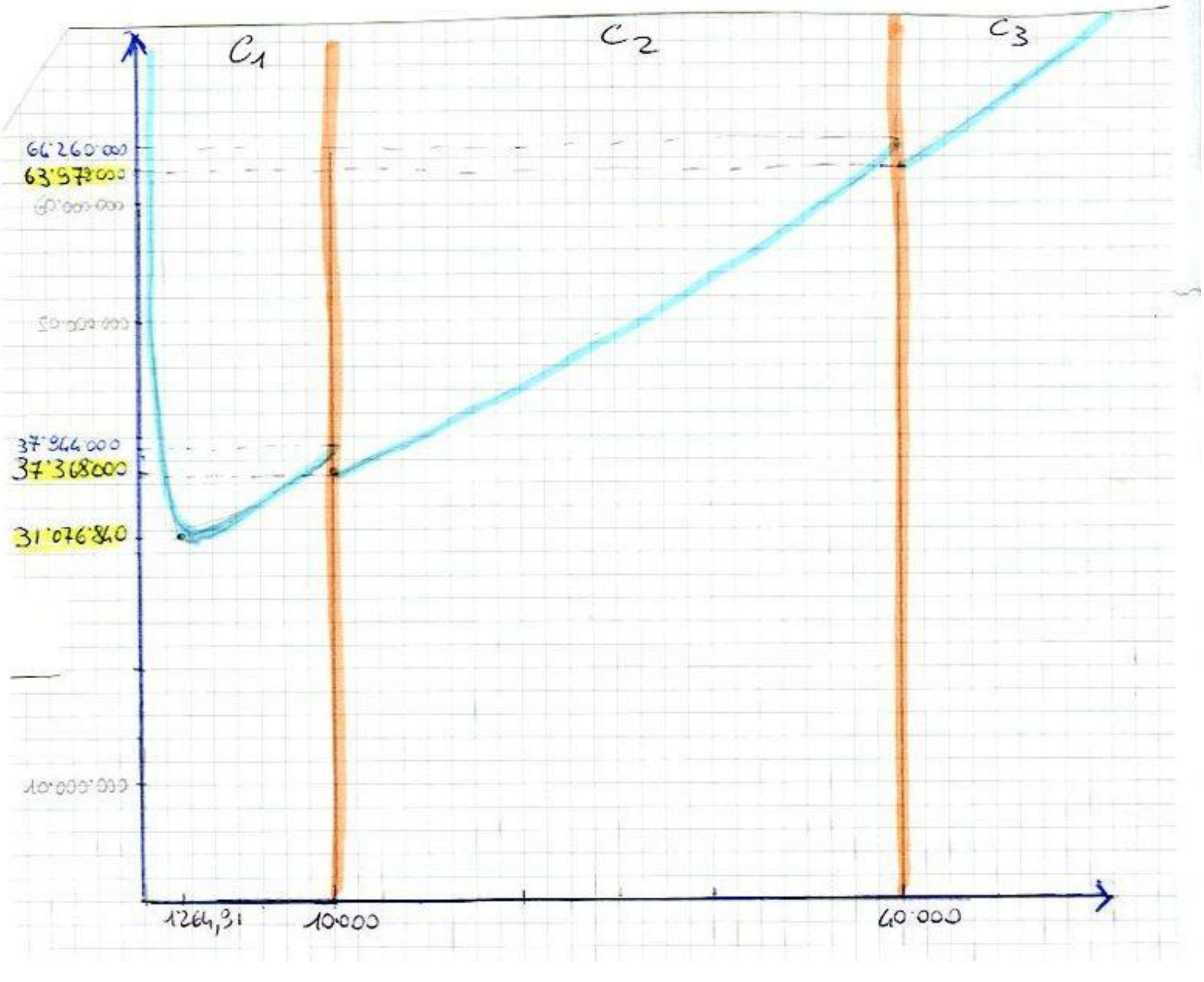
$Q = 12'000 * 12 = 144'000$ Kg

$S = 10'000$

$s = 5 * 360 = 1800$

$$C(x) = 10'000 \cdot \frac{144'000}{x} + 1800\,\frac{x}{2} + \underset{\text{costo mat. prima}}{V} = \frac{1'440'000'000}{x} + 900x + V$$

$C_1(1264{,}91) = 31'076'840$ $\quad C_2(10000) = 37'368'000$ $\quad C_3(40000) = 63'372'000$



quindi il costo per il trasporto e il magazzinaggio è $C(x) = \frac{1'440'000'000}{x} + 900x$
cui bisogna aggiungere una spesa annua, dovuta al costo della materia prima, ma dipendente da x, pari a:

$$200 \text{ lire al kg} \cdot 144'000 \text{ kg} = 28'800'000 \qquad \text{per } 0 < x < 10000$$
$$28'800'000 - 576'000 = 28'224'000 \qquad \text{per } 10'000 \leq x < 40'000$$
$$28'800'000 - 864'000 = 27'936'000 \qquad \text{per } x \geq 40'000$$

la spesa complessiva è dunque data dalla funzione

$$\begin{cases} C_T(x) = \frac{1'440'000'000}{x} + 900x + 28'800'000 & \text{per } 0<x<10'000 \\ C_T(x) = \frac{1'440'000'000}{x} + 900x + 28'224'000 & \text{per } 10'000 \leq x < 40'000 \\ C_T(x) = \frac{1'440'000'000}{x} + 900x + 27'936'000 & \text{per } x \geq 40'000 \end{cases}$$

la cui derivata è (in tutti e tre i casi):

$$C'_T(x) = -\frac{1'440'000'000}{x^2} + 900$$

$$C'_T(x) \geq 0 \qquad \frac{900x^2 - 1'440'000'000}{x^2} \geq 0 \qquad \frac{x^2 - 1'600'000}{x^2} \geq 0$$

$\frac{x^2 - 1'600'000}{x^2}$

per $x < 10'000$ il minimo costo si ottiene ordinando 1'264,31 kg
per volta con una spesa complessiva di: $C(1264,91) = \frac{1'440'000'000}{1'264,91} + 900 \cdot 1264,91 + 28'800'000 =$

$$= 1'138'420 + 1'138'420 + 28'800'000 = 31'076'840$$

per $10'000 \leq x < 40'000$ ~~il m~~ la funzione è sempre crescente
quindi il minimo si ha nell'estremo sinistro $(x = 10'000)$
con un relativo costo di

$$C(10'000) = 144'000 + 9'000'000 + 28'224'000 = 37'368'000$$

per $x \geq 40'000$ la funzione è sempre crescente: il minimo si ha
per $x = 40000$ ed è: $C(40'000) = 36'000 + 36'000'000 + 27'936'000 =$
$$= 63'972'000$$

Dal confronto dei tre minimi ottenuti in ognuno dei tre casi
$(0 < x < 10'000 \,;\ 10'000 \leq x < 40'000 \,;\ x \geq 40'000)$ si deduce che la
quantità ottimale di merce da ordinare è 1'264,31 kg per volta.