

A - ANALISI INFINITESIMALE

- 1) Quali sono le equazioni, implicite ed esplicite, del piano determinato dai punti $(-2;0;3)$ $(1,-2,-1)$ $(3,1,0)$ dello spazio cartesiano?
- 2) Qual è l'equazione del piano passante per i punti $D(3; 2; -1)$ $E(-2; 2; 0)$ $F(1; 2; -2)$ e come si può descrivere la sua posizione rispetto allo spazio cartesiano?
- 3) Dopo aver detto come si può esprimere l'equazione di un piano nello spazio cartesiano, fornisci alcuni esempi di piano, tra cui uno passante per l'origine, uno parallelo all'asse z , uno parallelo al piano xy e altri a tua scelta.
- 4) Dopo aver definito il concetto di funzione reale di due variabili reali, determina e rappresenta il dominio della funzione:
$$z = \frac{2+3y}{5x} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2x}$$
- 5) Dopo aver definito il concetto di funzione reale di due variabili reali, determina e rappresenta il dominio della funzione:
$$z = \frac{3x+1}{x^2-y^2}$$
- 6) Qual è la rappresentazione grafica del dominio della funzione $z = \frac{1}{3+2x-x^2-y^2}$ e come può essere descritto?
- 7) Dopo aver definito il concetto di dominio di una funzione reale di due variabili reali, determina e rappresenta il dominio di una funzione irrazionale di due variabili a tua scelta.
- 8) Definisci e rappresenta i domini delle seguenti funzioni:

$$z = \frac{1}{2-x^2} - \frac{3x-2}{3y-y^2} \qquad z = \frac{4x^2-1}{x^2+2y^2}$$
- 9) Dopo aver definito il concetto di linea di livello, determina e rappresenta alcune linee di livello, a tua scelta, della funzione $z = 3x - 4y$
- 10) Dopo aver definito il concetto di linea di livello, determina e rappresenta le linee di livello della funzione $z = 3x^2 - 2y$ ottenute ponendo $z=0$ e $z=-1$ e $z=1$
- 11) Dopo aver definito il concetto di linea di livello determina e rappresenta una linea di livello di una funzione di due variabili intera di terzo grado a tua scelta.
- 12) Studia e rappresenta le linee di livello ottenute intersecando con i piani di equazione $z=0$, $z=2$, $z=4$ la superficie data dall'equazione: $z = x^4 - x^2 - y$
- 13) Studia e rappresenta le linee di livello ottenute intersecando con i piani di equazione $z=0$, $z=1$, $z=-2$ la superficie data dall'equazione: $z = 4 - x^2 - y^2$
- 14) Dopo aver definito il concetto di linea di livello rappresenta tre linee di livello della funzione $z = 2x^2 + 2y^2 - 4y$
- 15) Dopo aver definito il concetto di derivata parziale determina le derivate parziali prime della funzione:

$$z = \frac{3x^2 - 2y}{3x^2y^3}$$
- 16) Quali sono le derivate parziali prime della funzione $z = \frac{(3+2x)^2}{2-y^2}$?
- 17) Come si calcola la derivata prima rispetto a y della funzione $z = 2x^3 - y^2 + 2x^2 + 2y + 3$ applicando la definizione ?

- 18) Applicando la definizione di derivata, calcola la derivata parziale prima rispetto a x della funzione $z=2x^2+xy+y^2$
- 19) Qual è il significato geometrico delle derivate parziali di una funzione di due variabili in un suo punto? Completa la spiegazione con un semplice esempio.
- 20) Determina i punti estremanti liberi della funzione $z = x^3 - 2x^2 + y^2$ commentando i tuoi passaggi.
- 21) Determina i punti stazionari della funzione $z = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 3y^2x + 4y^2 - 4x$ e stabiliscine la natura.
- 22) Determina i punti estremanti liberi della funzione $z = x^3 - 3x^2 - xy^2 + 3y^2$ commentando i tuoi passaggi
- 23) Spiega il procedimento di ricerca dei punti estremanti liberi di una funzione di due variabili; fornisci anche un esempio utilizzando una funzione intera di terzo grado.
- 24) Che cosa è il determinante hessiano e come si calcola? Correda la tua risposta con un semplice esempio.
- 25) Che cosa afferma il teorema di Schwarz? Correda la tua risposta con un semplice esempio.
- 26) Come si determinano i punti stazionari di una funzione reale di due variabili reali? Correda la tua risposta con un esempio.
- 27) Quali sono i punti stazionari della funzione $z = x^3 + y^2 - 2xy$? Sono anche punti estremanti?
- 28) Determina il massimo della funzione utilità $z=(x+3)(y+1)$ di un consumatore di due beni x e y , sapendo che il vincolo del bilancio è $5x+4y=21$.
- 29) Determina i punti estremanti assoluti della funzione $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ soggetta al vincolo $x+y=3$
- 30) Determina il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $z=x+y$ soggetta al vincolo
$$\begin{cases} x^2 + y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
- 31) Quali sono il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $z = x^2 + y^2$ soggetta al vincolo $x+3y=3$ con $0 \leq x \leq 3$?
- 32) Determina il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $z=xy$ all'interno vincolo costituito dal triangolo di vertici $(0;0)$ $(0;1)$ $(2;0)$
- 33) Utilizzando le linee di livello, determina il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $z=2y-x^2+3$ soggetta al vincolo:
$$\begin{cases} 2x \leq 0 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \\ 3y \geq 0 \end{cases}$$
- 34) Quali sono e che cosa rappresentano le funzioni marginali della funzione di domanda $d(p,r) = 15pr - 25p^2 - r^2$ rispetto al prezzo e al reddito? Quale dei due fattori influisce maggiormente sulla domanda se il prezzo è $p=100$ e il reddito $r=200$?
- 35) Dopo aver calcolato l'elasticità della domanda $d(p,r) = 15pr - 25p^2 - r^2$ rispetto al prezzo e al reddito per $p=100$ e $r=200$, stabilisci se la domanda è rigida, elastica, anelastica, spiegandone il motivo.
- 36) Un'impresa monopolistica produce due beni economici complementari. Le domande dei due beni, rispettivamente x_1 e x_2 sono espresse in funzione dei rispettivi prezzi p_1 e p_2 (in euro) dalle relazioni:
 $x_1 = 100 - 2p_1 - p_2$ $x_2 = 80 - p_1 - p_2$
 I costi unitari dei due beni sono rispettivamente 4 euro per il primo e 10 euro per il secondo.
 Determina le quantità che rendono massimo il profitto e i relativi prezzi di vendita nel caso in cui non vi siano limiti di produzione
- 36 bis) Risolvi il problema precedente nel caso in cui il limite di produzione sia 54

- 37) Come si classifica e si risolve il seguente problema? Qual è la sua soluzione?
Dovendo effettuare una telefonata all'estero, un utente che usufruisce dei servizi di due operatori telefonici può scegliere se effettuare la telefonata tramite il primo operatore (Telecom) o il secondo (Wind). Sapendo che la tariffa applicata da Telecom è 15,50 centesimi di euro alla risposta e 21,75 centesimi al minuto, mentre quella di Wind è 30,98 centesimi di euro alla risposta e 18,12 centesimi al minuto, stabilire, in base alla durata della telefonata, quale dei due operatori conviene utilizzare
- 38) *Dovendo chiedere un prestito di 10.000 euro si può scegliere tra le seguenti modalità di rimborso:*
 A- *Restituire 4000 euro tra 3 anni e 8000 tra 6 anni*
 B- *Restituire 2000 euro alla fine di ogni anno per 6 anni*
 Come si classifica questo problema? Come si imposta la soluzione se si deve risolvere tramite il metodo del t.i.r.? (Non effettuare i calcoli, ma specifica se si debba ricorrere a qualche particolare procedimento di calcolo). Se invece il problema va risolto in base al valore attuale, quale dato aggiungeresti? (Imposta la soluzione, specificando come deve avvenire la scelta, senza effettuare i calcoli).
- 39) Scegli, motivando la tua scelta, in base ad un tasso di attualizzazione da te fissato, quale tra queste due operazioni è più conveniente, allo scopo di investire la cifra di 5.000 euro:
- operazione A che prevede i seguenti ricavi: 1.000 euro dopo due anni, 2.000 euro dopo tre anni, 3.000 euro dopo 4 anni
 - operazione B che prevede i seguenti ricavi: 1.450 euro all'anno, posticipatamente per quattro anni
- 40) Come si risolvono i problemi di scelta a più alternative in una sola variabile? Completa la tua risposta con un semplicissimo esempio di scelta tra due processi industriali, in cui il costo sia espresso, in entrambi i casi, con una funzione lineare del numero di oggetti prodotti.
- 41) Dopo aver illustrato brevemente il procedimento per calcolare il tasso di rendimento nell'operazione di leasing, applicalo nel seguente caso: stipulazione di un contratto di leasing per un macchinario del valore di 10.000 euro, che prevede il pagamento di 48 mensilità costanti posticipate di 200 euro l'una, di 1.000 euro all'atto della consegna e 800 euro per il riscatto al termine della locazione.
- 42) Illustra brevemente il procedimento per calcolare il tasso di rendimento nell'operazione di leasing e applicalo in un caso, con dati a tua scelta, relativamente ad un contratto di leasing per un macchinario del valore di 10.000 euro.
- 43) Un'impresa, per produrre un certo bene in un dato periodo di tempo, sostiene costi fissi valutabili in 400 euro e costi variabili che corrispondono a 90 centesimi per ogni unità prodotta. Tenendo conto che l'impresa può produrre al massimo 1000 unità, e che per ogni unità venduta ricava 1,70 euro, qual è il numero minimo di unità da produrre per non essere in perdita? Qual è il massimo utile?
- 44) Come si risolvono i problemi di scelta a più alternative? Che cosa si intende per punti di indifferenza?
- 45) In che cosa consiste il metodo dell'attualizzazione. A quali problemi si applica? Fornisci un semplice esempio.
- 46) Come si rappresenta la funzione utile, qual è il suo massimo, quali sono i limiti di produzione per non essere in perdita per un'impresa le cui spese di produzione si suddividono in spese fisse di 1.000 euro al mese, costi di lavorazione di 7 euro per ogni unità prodotta e spese di manutenzione pari a 0,05 % del quadrato della quantità prodotta e che ricava da ogni singolo prodotto 25 euro?
- 47) Per la produzione di un bene, un'impresa sostiene: una spesa fissa annua di € 15.000, un costo per materie prime di € 40 per ogni unità prodotta, una spesa per la lavorazione pari a 1,5 % del quadrato del numero delle unità prodotte. Qual è il costo unitario minimo? Come si chiama tale punto e qual è il suo significato economico?
- 48) Quali sono le caratteristiche e i metodi risolutivi di un problema di magazzino? Fornisci un esempio.
- 49) Un mobilificio utilizza 5000 tavole di legno all'anno, con un consumo uniforme nel tempo. Ad ogni rifornimento le tavole vengono stoccate in un magazzino che può contenere fino a 250 tavole e che comporta una spesa di 10 euro per pezzo all'anno. Il costo di ogni ordinazione è di 40 euro e il prezzo di ogni tavola è di 15 euro. Qual è il modello matematico che risolve il problema? Quali sono i passaggi teorici da effettuare per determinare il minimo costo e il numero di ordinazioni all'anno da effettuare? Quali sono le ipotesi semplificatrici?
- 50) Con i dati del problema precedente determina la quantità ottimale da ordinare ogni volta, il numero di ordinazioni, il minimo costo. Se la capacità del magazzino si riducesse a 180 tavole cambierebbe il risultato? Perché?
- 51) Perché nel problema precedente non hai utilizzato il prezzo delle tavole? Se al prezzo delle tavole venisse applicato uno sconto per ordinazioni superiori ad un certo numero di tavole come cambierebbe il procedimento risolutivo? Spiegalo con un esempio pratico.

- 52) Costruisci il modello matematico del seguente problema, riconoscendone il tipo e indicando quali sono le ipotesi semplificatrici: *Un'industria vuole stabilire la quantità di materie prime da ordinare ogni volta e la spesa da preventivare, affinché il costo totale sia minimo, sapendo che il consumo di materia prima è di 200 quintali al giorno, con ritmo di lavorazione di 20 giorni al mese per 12 mesi, il costo fisso per ogni ordinazione di 1800 euro, il costo di magazzino di 12 cent. al quintale al giorno.*
- 53) In un problema delle scorte con sconti sulle quantità ordinate la funzione costo risulta così determinata:
- $$y = 5x + \frac{800.000}{x} + 20.000 \quad \text{se } x < 500$$
- $$y = 5x + \frac{800.000}{x} + 15.000 \quad \text{se } 500 \leq x < 800$$
- $$y = 5x + \frac{800.000}{x} + 12.000 \quad \text{se } x \geq 800$$
- Qual è la quantità ottima da ordinare ogni volta?
- 54) Come si risolvono i problemi di programmazione lineare in due variabili? Correda la tua risposta con un esempio.
- 55) Risolvi il seguente problema, dopo aver stabilito di che tipo di problema si tratta e aver detto molto brevemente quali sono i possibili metodi di risoluzione: *Un'industria fornisce giornalmente un prodotto di due tipi, A e B, di confezioni al prezzo unitario di 10 euro e 12 euro rispettivamente. L'industria deve fornire, per obbligo contrattuale, non più di 800 confezioni del tipo A e un numero di confezioni del tipo B non inferiore a 200 e non superiore a 1200. Sapendo che, tra confezioni del tipo A e del tipo B, non possono essere fornite più di 1600 confezioni al giorno, determinare il programma che dà il massimo ricavo giornaliero.*
- 56) Imposta e risolvi il modello matematico che formalizza il seguente problema:
Un'impresa per la produzione di due beni, A e B, può disporre settimanalmente di 1200 Kg di resina e 900 ore di lavoro. I dati tecnici relativi alla produzione settimanale sono i seguenti:
-la produzione di ogni bene di tipo A richiede 5Kg di resina e 5 ore di lavorazione
-la produzione di ogni bene di tipo B richiede 12Kg di resina e 2 ore di lavorazione. I prezzi unitari di vendita dei due beni sono rispettivamente 800 euro e 500 euro al kg. Qual è la quantità da produrre settimanalmente per avere il massimo ricavo?
- 57) Come si risolvono i problemi di programmazione lineare in tre variabili nel caso in cui le variabili siano legate tra loro da un'equazione?
- 58) Formula il modello matematico del seguente problema e indica quali sono i possibili modi per risolverlo: *Una ditta fabbrica un prodotto P miscelando tre prodotti P_1 P_2 P_3 . P_1 contiene il 6% di una sostanza A e il 60 % di B. P_2 contiene il 3% della sostanza A e il 65 % di B. P_3 contiene il 5% di una sostanza A e il 45 % di B. E' necessario che P contenga almeno il 5% della sostanza A e almeno il 50% della sostanza B. Il costo per ogni Kg dei tre prodotti è di 0,4 euro per P_1 0,6 per P_2 0,25 per P_3 . Determinare le quantità di P_1 P_2 P_3 necessarie alla formazione di un Kg di P in modo da realizzare il minimo costo.*

C - MATEMATICA ATTUARIALE

- 59) Sapendo, dalle tavole attuariali del 1992, che il numero di uomini vivi a 40 anni è 95631 e il numero di uomini vivi a 41 anni è 95464, calcola D_{40} e C_{40} . Sapendo inoltre che $N_{60}=106263,61$ $M_{40}=5289,65$ e $M_{60}=4096,21$ calcola qual è il capitale che un uomo di 40 anni può assicurare ai suoi eredi al momento della propria morte, nel caso in cui questa avvenga entro vent'anni, se con un premio unico puro di 10000 euro vuole garantirsi anche una rendita vitalizia di 100 euro all'anno dai 60 anni in poi.
- 60) Quali sono e come si definiscono i simboli di commutazione che si utilizzano nelle assicurazioni caso vita? Che cosa è il premio unico puro? Qual è la formula per calcolare il premio unico puro di un'assicurazione stipulata da una persona di 30 anni per ottenere un capitale C al compimento dei 70 anni? Quali sono i passaggi per ottenerla? Qual è la formula per calcolare il premio unico puro per un'assicurazione, stipulata dalla stessa persona, per ottenere una rendita vitalizia di rata annuale R della durata di 10 anni a partire dal compimento dei 60 anni?
- 61) Che cosa sono le funzioni biometriche? A che cosa servono? Come puoi definire il contraente, il beneficiario e l'assicurato? Come si calcola il premio unico puro di un'assicurazione contratta da una persona di 40 anni che si vuole assicurare un capitale di 10000 euro al compimento dei 65 anni, una rendita vitalizia di 2000 euro dal compimento di 70 anni per 8 anni e di 3000 euro dal compimento di 78 per tutta la vita? Perché si chiama puro e perché unico?

- 62) Che cosa sono le funzioni biometriche? Quali sono e come si definiscono i simboli di commutazione che si utilizzano nelle assicurazioni caso vita e caso morte? Che cosa è il premio unico puro? Qual è la formula per calcolare il premio unico puro di un'assicurazione stipulata da una persona di 30 anni per assicurare ai suoi eredi un capitale C all'atto della sua morte nel caso in cui questa avvenga entro 20 anni e per ottenere una rendita vitalizia illimitata di rata annuale R a partire dal compimento dei 70 anni?
- 63) Maria, all'età di 42 anni, versa per 10 anni 1500 euro come premio annuo per garantire a se stessa un capitale all'età di 60. Arrivata a 60 riscuote quel capitale e lo utilizza come premio unico puro per garantirsi una rendita vitalizia immediata posticipata fino ai 75 anni compresi e una rendita di rata doppia della prima dai 76 anni in poi. Qual è il valore delle rate che si assicura per la sua vecchiaia?
- 64) Lucia, all'età di 38 anni ha iniziato a versare presso una banca, al tasso del 2 % effettivo annuo, rate annuali anticipate di 500 euro per 5 anni. Al compimento dei 45 anni ritira il capitale maturato e lo utilizza come premio unico puro per garantire ai suoi eredi una certa somma all'atto della sua morte, nel caso in cui questa avvenga prima dei 55 anni. Qual è la somma assicurata ai suoi eredi?
- 65) Sara, all'età di 40 anni, cede, al tasso di valutazione del 5% effettivo annuo, una rendita perpetua posticipata, la cui rata annuale è di 3000 euro, ad una compagnia di assicurazioni come premio unico puro per garantire a se stessa una somma se in vita a 60 e metà di tale somma ai suoi eredi, alla fine dell'anno di morte, se dovesse morire prima di raggiungere tale età. Quale somma garantisce a se stessa e quale ai suoi eredi? Supponendo che la signora arrivi ai 60 anni e che investa la somma ritirata al tasso del 3 % effettivo annuo, quanto potrà ritirare quando avrà 70 anni?

QUESITI MISTI

- 66) Dopo aver detto di che tipo di problema si tratta, calcola per quale quantità il costo mensile unitario di un'impresa è minimo se le spese di produzione sono le seguenti:
- spesa fissa mensile di 1.000 euro
 - costo variabile di 3 euro per ogni unità prodotta
- spesa pari al 10% del quadrato delle quantità prodotte
- A quale prezzo deve essere venduto il prodotto affinché la produzione dell'articolo sia conveniente per l'impresa? Che cosa potrebbe succedere in un mercato di libera concorrenza e come dovrebbe agire l'imprenditore?
- 67) Dopo aver detto di che tipo di problema si tratta, stabilisci se è più conveniente, in base al tasso di attualizzazione del 3% annuo, pagare subito 10.000 euro oppure pagare 4 rate semestrali di 2.600 euro, di cui la prima tra un anno.
- 68) Dopo aver detto di che tipo di problema si tratta, stabilisci se è più conveniente, in base al tasso di attualizzazione del 3% annuo, pagare subito 10.000 euro oppure pagare 4 rate semestrali posticipate (quindi la prima rata tra sei mesi) di 2.600 euro.
- 69) Determina il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $z=xy-x^2y+2x$ soggetta al vincolo:
$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$
- 70) Che tipo di problema è e come si rappresenta e si risolve quello di un utente di un servizio di telefonia che deve scegliere se optare per una offerta che gli consente, con un contributo aggiuntivo di 60 euro al bimestre (IVA compresa), di ottenere uno sconto del 50% su tutte le telefonate urbane, che a regime normale gli costano 20 centesimi al minuto (esclusa IVA, pari al 20%)?
- 71) Qual è il massimo assoluto e quale il minimo assoluto della funzione $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y$ soggetta al vincolo dato dal triangolo di vertici (0;0) (6;0) (0;3) ?
Quali sono i due metodi che conosci per rispondere a questo quesito? Utilizzane uno per determinare quanto richiesto e descrivi l'altro.
- 72) Le domande di due beni sono date dalle seguenti leggi
- $$x = 1500 - 8p_1 - 2p_2 \qquad y = 1000 - p_1 - 5p_2$$
- I prezzi sono: $p_1 = 100$ $p_2 = 80$
- Ciascuna domanda è elastica rispetto al proprio prezzo? Spiegane il motivo.

Come sono correlati i due beni? Perché?

73) Un consumatore può spendere fino a 300 euro per l'acquisto di due beni i cui prezzi sono rispettivamente 12 e 20 euro. La funzione utilità è: $U(x, y) = xy + 6x + 5y$

Qual è il procedimento per determinare la massima utilità? Quali sono le quantità dei due beni che rendono massima l'utilità?

74) Un'azienda deve inscatolare i suoi prodotti e per far ciò ha a disposizione i tre macchinari A, B, C. La macchina A necessita di 14 minuti per essere predisposta all'uso e impiega 3 minuti per confezionare una scatola. La macchina B necessita di 30 minuti di preparazione e impiega 2 minuti per confezionare una scatola. La macchina C non necessita di preparazione e impiega 5 minuti per confezionare una scatola. Sapendo che la produzione massima giornaliera non può superare 50 scatole, determina quale macchina conviene utilizzare al variare del numero di scatole da confezionare.

75) Un'azienda fabbrica due prodotti P_1 e P_2 utilizzando i due macchinari A e B. Ogni prodotto P_1 richiede 3 minuti di lavorazione con la macchina A e 6 minuti con la macchina B; ogni prodotto P_2 richiede 7 minuti e 30 secondi di lavorazione con la macchina A e 3 minuti con la macchina B. La macchina A può funzionare 6 ore e 30 minuti al giorno, la macchina B 5 ore al giorno. I prodotti P_1 sono venduti a 62 euro l'uno, e i prodotti P_2 a 50 euro l'uno. Determina la combinazione produttiva che comporta il massimo ricavo

76) Un'azienda fabbrica due prodotti P_1 e P_2 . Le domande dei due beni, rispettivamente x e y sono espresse in funzione dei rispettivi prezzi p_1 e p_2 (in euro) dalle relazioni:

$$x = 8.000 - 10p_1 \quad y = 10.000 - 20p_2$$

Sapendo che i costi unitari dei due beni sono rispettivamente 80 euro per il primo e 40 euro per il secondo, determina le quantità da produrre per rendere massimo il profitto e i prezzi con cui i beni sono immessi sul mercato