Punti stazionari di una funzione di due variabili

DEFINIZIONE DI MASSIMO E DI MINIMO RELATIVO

Data una funzione $z = f(x, y)$ definita in D sottoinsieme di $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ si dice che tale funzione ha un MASSIMO RELATIVO nel punto P(x_0, y_0) se esiste un intorno (cerchio aperto C di centro (x_0, y_0)) tale che per ogni punto (x, y) $\in$ C$\cap$D si verifichi:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

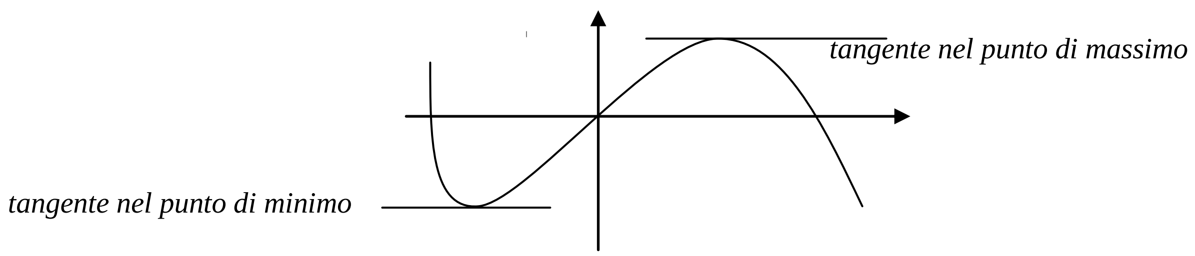
Se la disequazione vale per tutto il dominio D, il massimo è un <u>massimo</u> <u>assoluto</u>.

Analogamente si dice che f(x,y) ha un MINIMO RELATIVO nel punto P(x_0, y_0) se esiste un intorno (cerchio aperto C di centro (x_0, y_0)) tale che per ogni punto (x, y) $\in$ C$\cap$D si verifichi:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

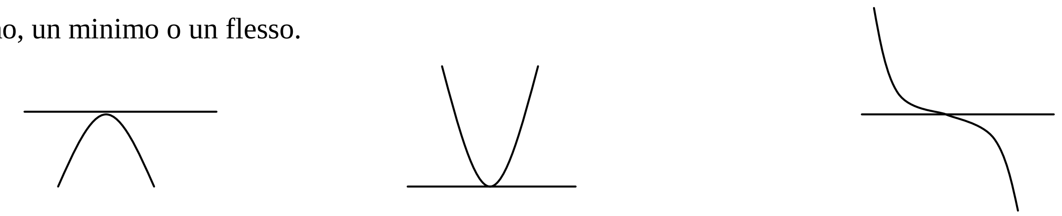
Se la disequazione vale in tutto il dominio il minimo è un <u>minimo</u> <u>assoluto</u>.

Nei punti di massimo e minimo relativi il piano tangente alla superficie associata alla funzione $z = f(x, y)$ è parallelo al piano xy (proprio come per la curva associata alla funzione $y = f(x)$ la retta tangente in un punto di massimo o di minimo è parallela all'asse x).



D'altra parte per una funzione di una variabile $y = f(x)$ l'annullarsi della derivata prima $f'(x_0)$ nel punto di ascissa x_0, cioè il fatto che la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ sia parallelela all'asse x, è una condizione necessaria, ma non sufficiente affinché P sia un massimo o un minimo.

Sappiamo infatti che: se $f'(x_0) = 0$ il punto $(x_0, f(x_0))$ è un <u>punto</u> <u>stazionario</u> (o critico). Un punto stazionario può essere un massimo, un minimo o un flesso.



Quindi: $(x_0, f(x_0))$ è MAX o min $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

invece non si può affermare che: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ è un MAX o min

ma si può affermare che:

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ è un punto critico, cioè un massimo, o un minimo, o un flesso.

Analogamente, per una funzione di due variabili $z = f(x, y)$ l'annullarsi contemporaneo delle due derivate prime f'_x e f'_y cioè l'esistenza del piano tangente alla superficie parallelo al piano xy ci assicura soltanto l'esistenza di un punto stazionario (detto anche critico) che potrebbe essere un massimo o un minimo, ma anche un punto di sella o un flesso. Si dice quindi che l'annullarsi contemporaneo delle due derivate prime è condizione necessaria, ma non sufficiente per l'esistenza di punti estremanti (massimi o minimi).

Quindi per determinare i massimi ed i minimi di funzioni di due variabili dovremo innanzi tutto risolvere il sistema $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ e, in secondo luogo, verificare se le soluzioni del sistema individuano massimi, minimi, o punti di sella o di flesso (non significativi per i nostri scopi). A tal fine si dovrà studiare il segno del determinante hessiano

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy} \cdot f''_{yx}$$

Se $H(x_0, y_0) < 0$ il punto $P(x_0, y_0)$ può essere punto di sella, di flesso o un punto particolare, cioè un punto stazionario (quindi con piano tangente orizzontale, cioè parallelo al piano xy) che non è né massimo né minimo. E' da notare che il libro di testo (vedi pag.32) indica genericamente con punto di sella qualunque punto stazionario che non sia anche punto estremante (cioè massimo o minimo);

se invece $H(x_0, y_0) = 0$ siamo in presenza di un caso dubbio: potrebbe anche essere massimo o minimo, ma per verificarlo si dovrebbero utilizzare le linee di livello.

Se invece $H(x_0, y_0) > 0$ siamo in presenza di un massimo o di un minimo, cioè di un punto estremante).

Precisamente: se $f''_{xx} > 0$ si ha un minimo (si ha infatti concavità verso l'alto);

se $f''_{xx} < 0$ si ha un massimo (si ha infatti concavità verso il basso).

In generale riscontreremo che $f''_{xy} = f''_{yx}$. Ciò non è un caso infatti esiste il seguente:

TEOREMA DELL'INVERSIONE DELL'ORDINE DI DERIVAZIONE (O TEOREMA DI SCHWARZ):

Se in un intorno di P_0 esistono le derivate parziali f'_x, f'_y, f''_{xy} e in P_0 la f''_{xy} è continua, allora esiste anche f''_{yx} e risulta: $f''_{xy} = f''_{yx}$.

DOMANDA

Tenendo presente il teorema di Schwarz, si dimostri che, sotto l'ipotesi $H(x_0, y_0) > 0$, $f''_{xx} > 0 \Leftrightarrow f''_{yy} > 0$.

RISPOSTA (da confrontare solo dopo aver risposto ☺ !!)

Esercizi pag.80 n. da 346 a 381 a scelta

Risoluzione dell'esercizio n.371 (determinare i punti stazionari della funzione $z = 2x^2y + 2y^3 - 4xy - 6y$)

(svolto in classe il 16 dicembre)

ESERCIZIO 7

Determina i massimi ed i minimi relativi liberi della funzione:

$$z = x^3 + 3y^3 - 3xy^2 - 12y + 8$$

ESERCIZIO 8

Determina i massimi ed i minimi relativi liberi della funzione

$$z = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - xy^2 + 2y^2$$

ESERCIZIO 9

Determina i punti critici della funzione:

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

ESERCIZIO 10

Determina i punti stazionari della funzione:

$$z = x^3 + xy^2 - 3y^2$$

SOLUZIONI (da confrontare solo dopo aver svolto gli esercizi ☺ !!)