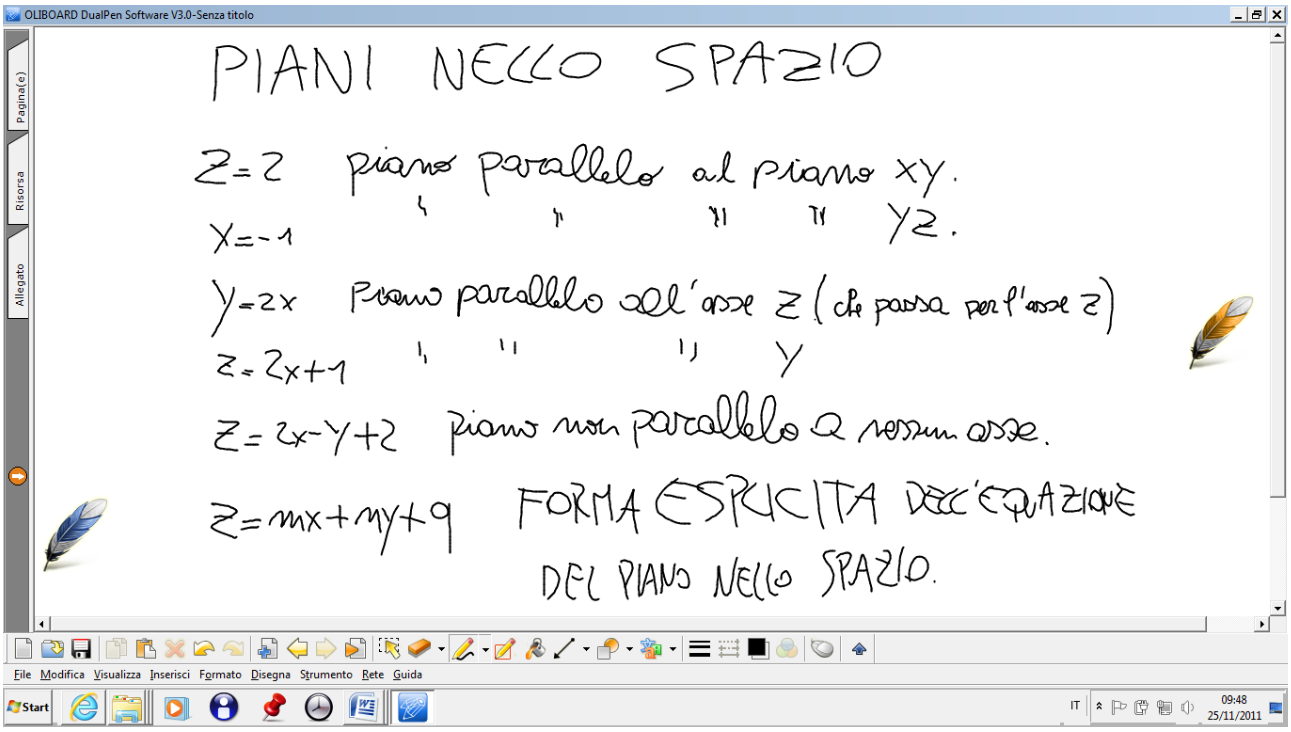
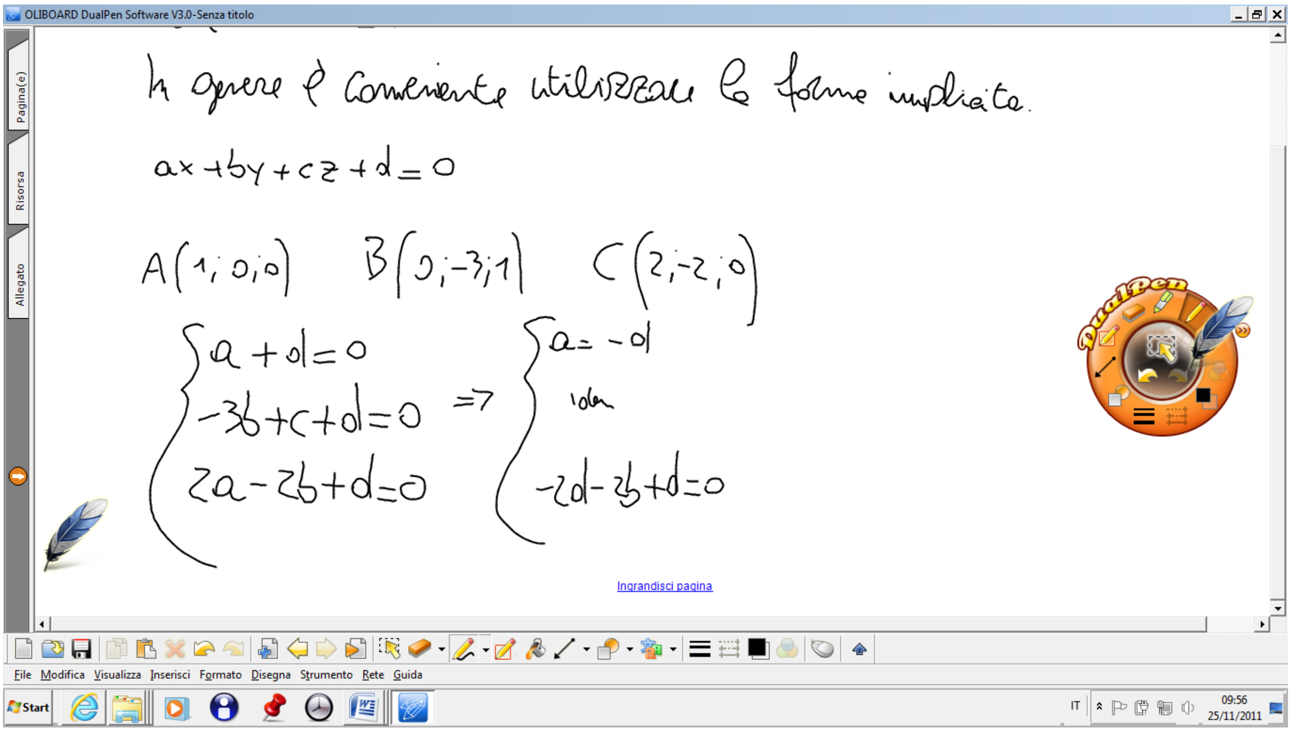
Piani nello spazio cartesiano

In questa lezione abbiamo scritto alcune equazioni associandole ognuna al relativo piano nello spazio cartesiano:



Abbiamo constatato che i piani paralleli all'asse z non possono essere espressi mediante l'equazione esplicita, poiché nell'equazione manca z.

Come succede per le rette nel piano, anche per i piani nello spazio, l'equazione implicita, meno comoda di quella esplicita, ha però il vantaggio di essere completa, perché comprende TUTTI i piani (anche quelli paralleli all'asse z). Quindi, se devo determinare l'equazione di un piano per tre punti A,B,C (come nell'esempio seguente) è conveniente utilizzare la forma implicita:



Completando il sistema $\begin{cases} a+d=0 \\ -3b+c+d=0 \\ 2a-2b+d=0 \end{cases}$ si trova: $\begin{cases} a=-d \\ b=-\frac{1}{2}d \\ c=-\frac{5}{2}d \end{cases}$ quindi:

$-dx-\frac{1}{2}dy-\frac{5}{2}dz+d=0$ da cui, dividendo per -d: $x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}z-1=0$

Cioè (moltiplicando per 2): $2x+y+5z-2=0$ che, in forma esplicita, è: $z=-\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}$

Il libro di testo tratta l'argomento a pag. 7 e 8 e i relativi esercizi sono a pag.61

Riassumendo:

L'equazione generale, in forma implicita, di un piano nello spazio cartesiano è: $ax+by+cz+d=0$

Se $c \neq 0$ essa si può esplicitare ottenendo: $z=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y-\frac{d}{c}$

cioè un'equazione del tipo: $z=mx+ny+q$ (equazione del piano in forma **esplicita**)

che è quindi una funzione di due variabili $z=f(x;y)$ **lineare** cioè di primo grado

Osserviamo che, se $c=0$, si ottiene un piano parallelo all'asse z e in tal caso il piano non è esprimibile mediante un'equazione esplicita del tipo $z=mx+ny+q$ (analogamente nel caso del piano cartesiano le rette del tipo $x=k$ non sono esprimibili con equazioni esplicite $y=mx+q$).

Quindi la forma esplicita rappresenta tutti i piani con esclusione di quelli paralleli all'asse z.

Osserviamo anche che: una qualunque funzione di due variabili **lineare** ha come superficie associata un **piano** non parallelo all'asse z, le cui linee di livello sono tutte **rette parallele** fra di loro.

(vedi esercizio 3 sulle linee di livello)

L'altra osservazione che possiamo fare, osservando una funzione di due variabili lineare, è che $z=mx+ny+q$ ha due coefficienti angolari, uno rispetto a x e uno rispetto a y, tale osservazione ci permette di immaginare che le funzioni di due variabili abbiano due derivate (una rispetto a x e una rispetto a y).... Il prossimo argomento sarà infatti quello delle derivate parziali

DOMANDA 1

Data l'equazione di un piano in forma implicita:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Che caratteristica ha il piano se: d = 0 ?

DOMANDA 2

Qual è l'equazione:

A) del piano xy

B) del piano xz

C) del piano yz

DOMANDA 3

Determina l'equazione del piano passante per i punti

P_1 (2; 5; -2) P_2 (0; 3; 4) P_3 (1; 0; 8)

Una retta nello spazio si può ottenere come intersezione di due piani non paralleli.

In particolare l'asse x si ottiene come soluzione del sistema $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

DOMANDA 4

Come si può determinare l'asse y ?

DOMANDA 5

Come si può determinare l'asse z ?

DOMANDA 6

Qual è l'equazione generica di un piano

A) parallelo al piano xy?

B) parallelo al piano xz?

C) parallelo al piano yz?

RISPOSTE ALLE DOMANDE (da confrontare solo dopo aver risposto ☺ !!)