Linee di livello di funzioni di due variabili

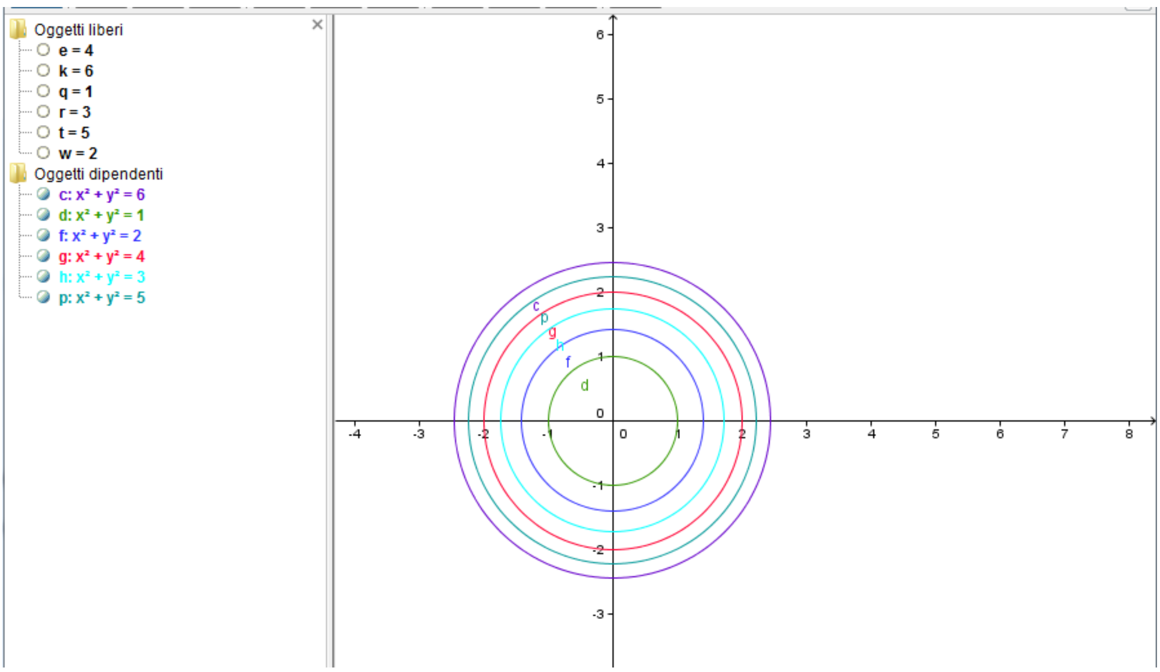
Come abbiamo visto (vedi lezione: [Rappresentazione di funzioni di due variabili nello spazio cartesiano]) le funzioni di due variabili si possono rappresentare nello spazio cartesiano come superfici, tuttavia è molto più pratico (e anche utile nei problemi economici) rappresentare le linee di livello.

Per capire che cosa sono le linee di livello, può essere utile consultare una cartina geografica.
Nella seguente cartina, che rappresenta la zona limitrofa alla nostra scuola, si possono notare le linee di livello intorno alla vetta del monte Bedea (667 m. sul livello del mare). La prima linea di livello più scura è costituita dai punti che hanno altitudine 600 metri, la seconda (che passa vicino a Roggiolo) è costituita dai punti che hanno altitudine 500 metri e cosi le successive fino ad arrivare al livello del lago (202 m. s.l.m.)

Allo stesso modo, le linee di livello di una funzione di due variabili z=f(x;y) sono la rappresentazione di tutti i punti della superficie che hanno la stessa quota (quindi z=k dove k è una costante).

Tali linee di livello si rappresentano tutte sul piano xy quindi:
una linea di livello è costituita dalle proiezioni ortogonali sul piano xy dei punti, aventi la stessa quota, della superficie associata alla funzione z=f(x;y) (vedi pag. 16)

Nella seguente figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2$
(le linee di livello di tale funzione esistono solo per valori non negativi di z)



Quindi le linee di livello generiche (z=k) della funzione $z = x^2 + y^2$ sono circonferenze concentriche di equazione

$x^2 + y^2 = k$ con centro nell'origine e raggio $\sqrt{k}$

Non esistono quindi linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2$ per valori negativi di z

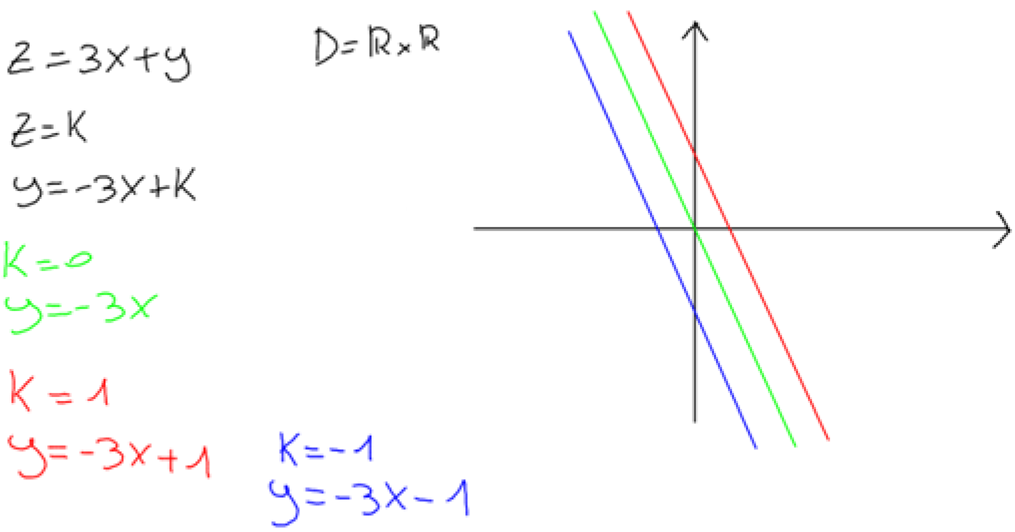
Nella seguente figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello della funzione $z = 3x + y$ dopo aver osservato che ha dominio $D = \Re x \Re$ (cioè tutto il piano xy).

Abbiamo considerato:

z=0 ottenendo la linea di livello rappresentata in verde

z=1 ottenendo la linea di livello rappresentata in rosso

z=-1 ottenendo la linea di livello rappresentata in blu



Ponendo $z = k$ si ottengono le linee di livello $3x + y = k$ cioè $y = -3x + k$

(rette pallele tra di loro, cioè fascio improprio di rette)