# Linee di livello di funzioni di due variabili

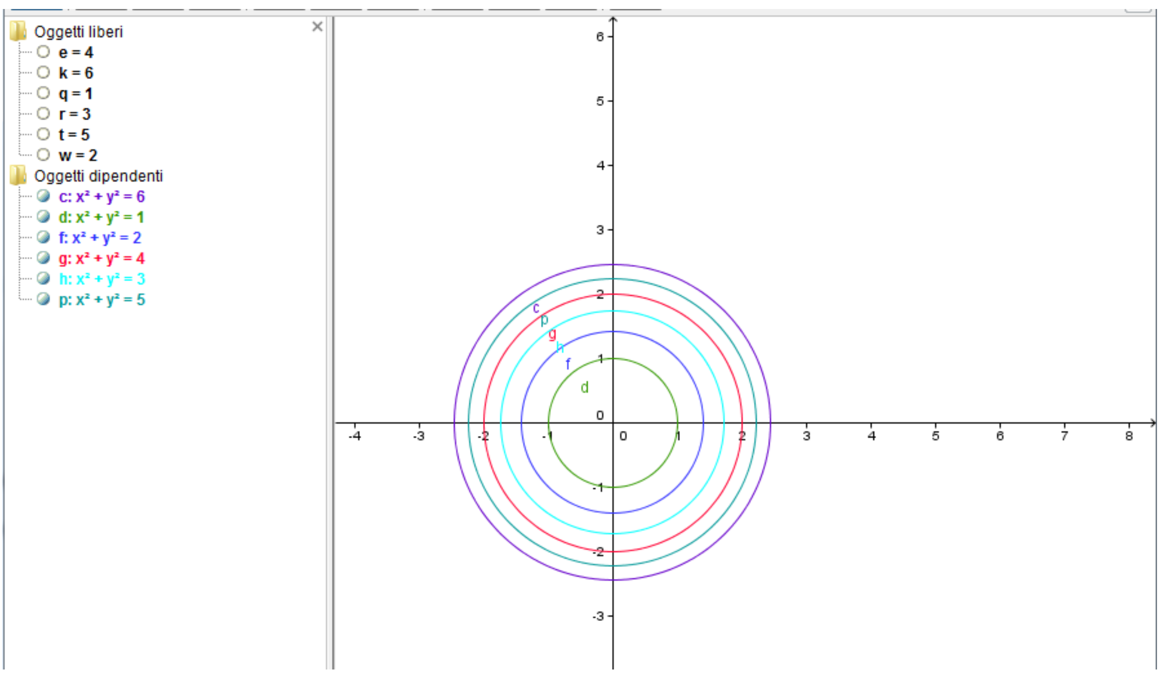
Come abbiamo visto (vedi lezione: Rappresentazione di funzioni di due variabili nello spazio cartesiano) le funzioni di due variabili si possono rappresentare nello spazio cartesiano come superfici, tuttavia è molto più pratico (e anche utile nei problemi economici) rappresentare le linee di livello.

Per capire che cosa sono le linee di livello, può essere utile consultare una cartina geografica.
Nella seguente cartina, che rappresenta la zona limitrofa alla nostra scuola, si possono notare le linee di livello intorno alla vetta del monte Bedea (667 m. sul livello del mare). La prima linea di livello più scura è costituita dai punti che hanno altitudine 600 metri, la seconda (che passa vicino a Roggiolo) è costituita dai punti che hanno altitudine 500 metri e cosi le successive fino ad arrivare al livello del lago (202 m. s.l.m.)


Allo stesso modo, le linee di livello di una funzione di due variabili z=f(x;y) sono la rappresentazione di tutti i punti della superficie che hanno la stessa quota (quindi z=k dove k è una costante).

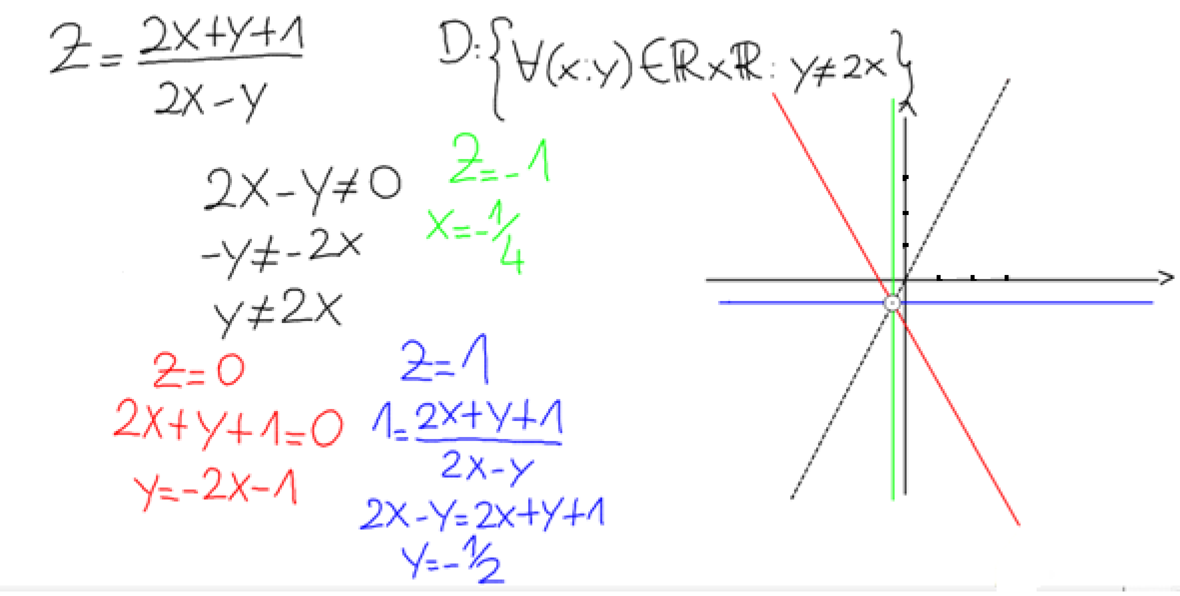
Tali linee di livello si rappresentano tutte sul piano xy quindi:
una linea di livello è costituita dalle proiezioni ortogonali sul piano xy dei punti, aventi la stessa quota, della superficie associata alla funzione z=f(x;y) (vedi pag. 16)

Nella seguente figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2$
(le linee di livello di tale funzione esistono solo per valori non negativi di z)



Nella seguente figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello della funzione $z=\frac{2x+y+1}{2x-y}$

dopo averne studiato e rappresentato il dominio (abbiamo escluso dal dominio la linea tratteggiata)




Le linee di livello disegnate (z=0, z=-1, z=1) attraversano la retta esclusa dal dominio nel punto $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

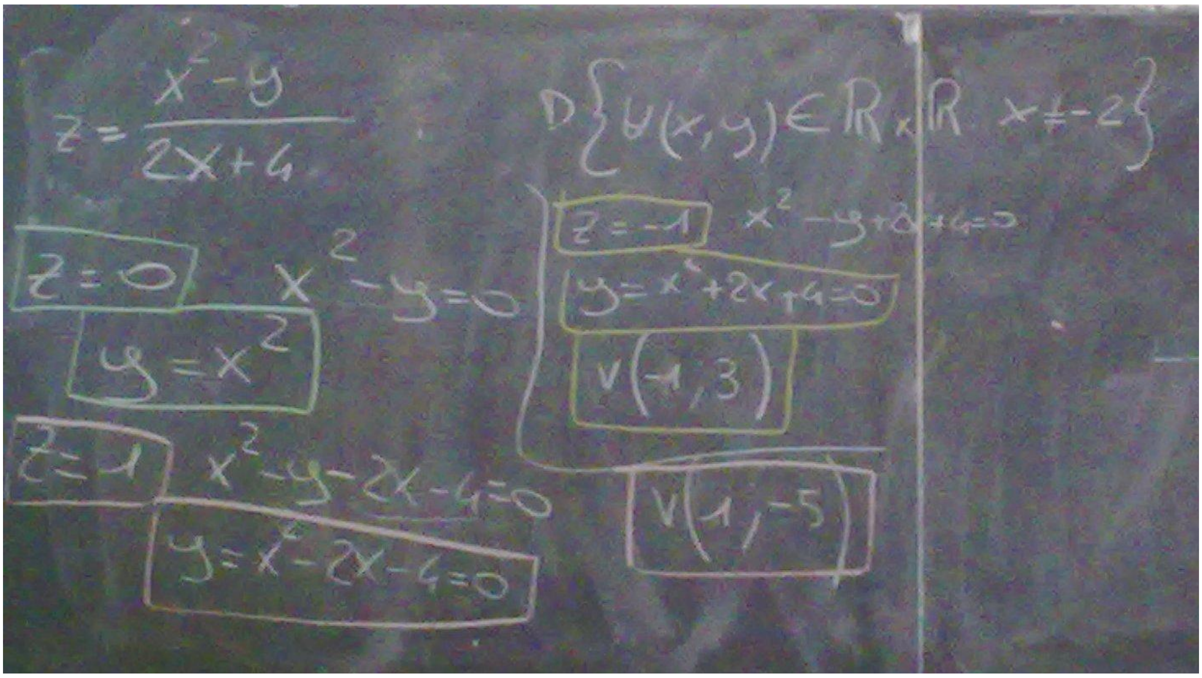
Più in generale, ponendo z=k si ottiene, come linea di livello, la retta di equazione:

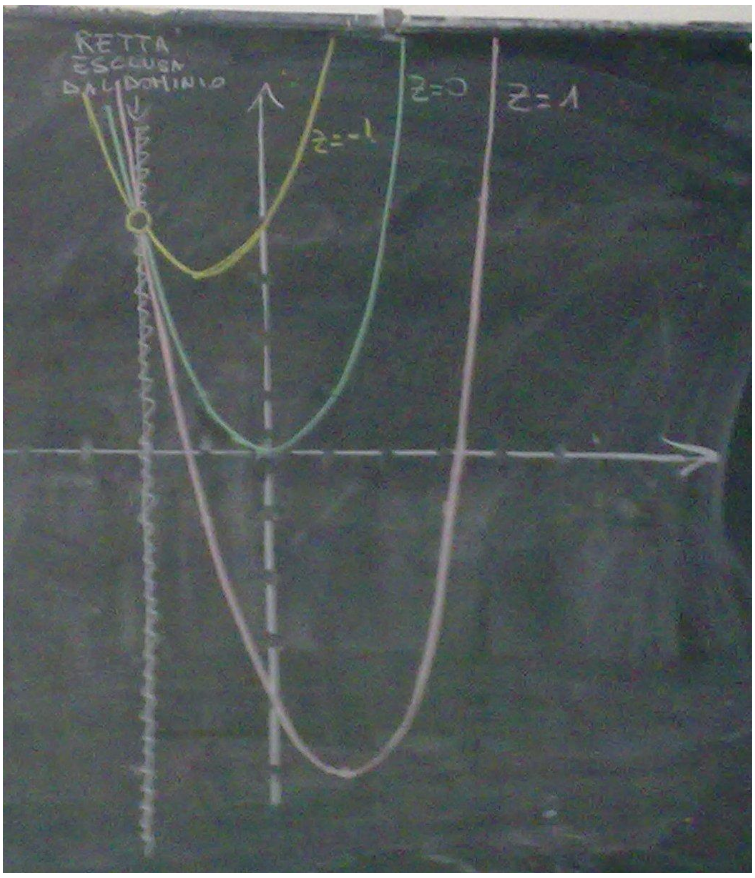
$\frac{2x+y+1}{2x-y}=k$ cioè: $2kx-ky=2x+y+1$ quindi: $(k+1)y=(2k-2)x-1$

che incontra la retta esclusa dal dominio y=2x nel punto $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

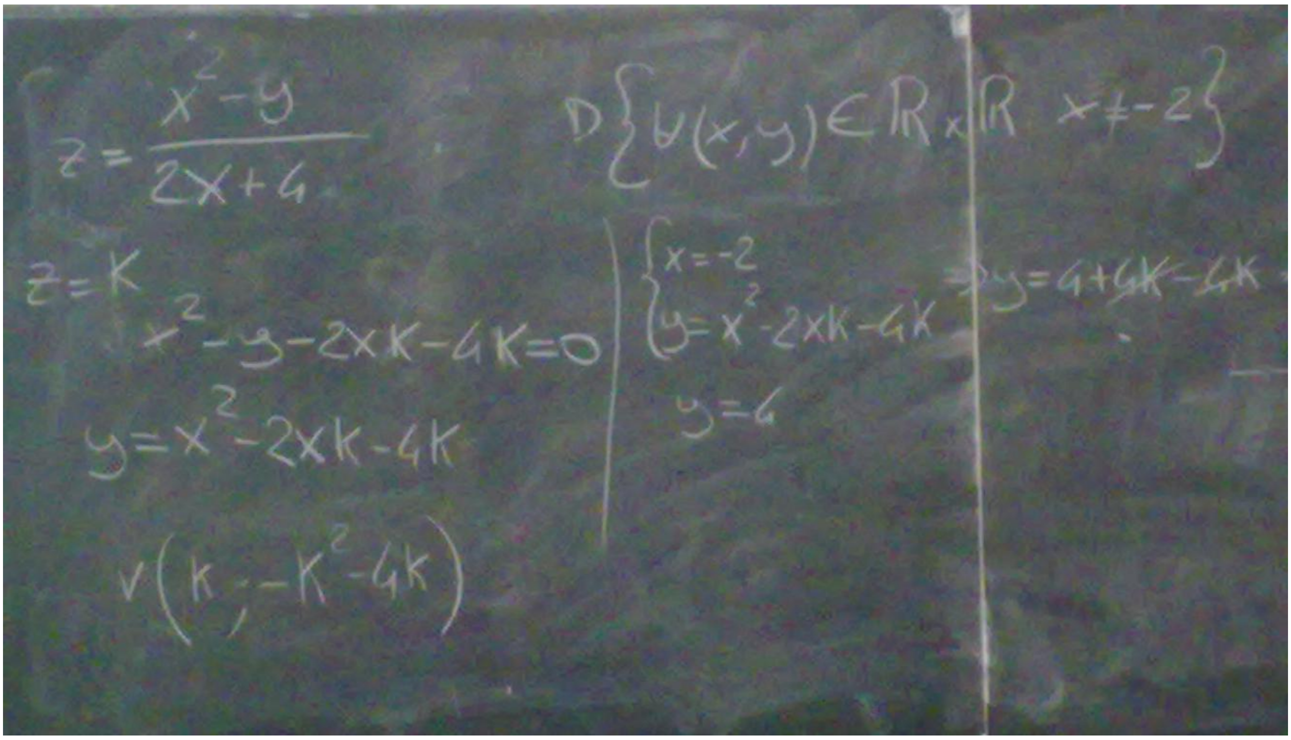
Ogni linea di livello ha quindi, in corrispondenza di tale punto una discontinuità eliminabile.

Nelle seguenti figure abbiamo studiato (21/11/11) e rappresentato alcune linee di livello della funzione $z=\frac{x^2-y}{2x+4}$

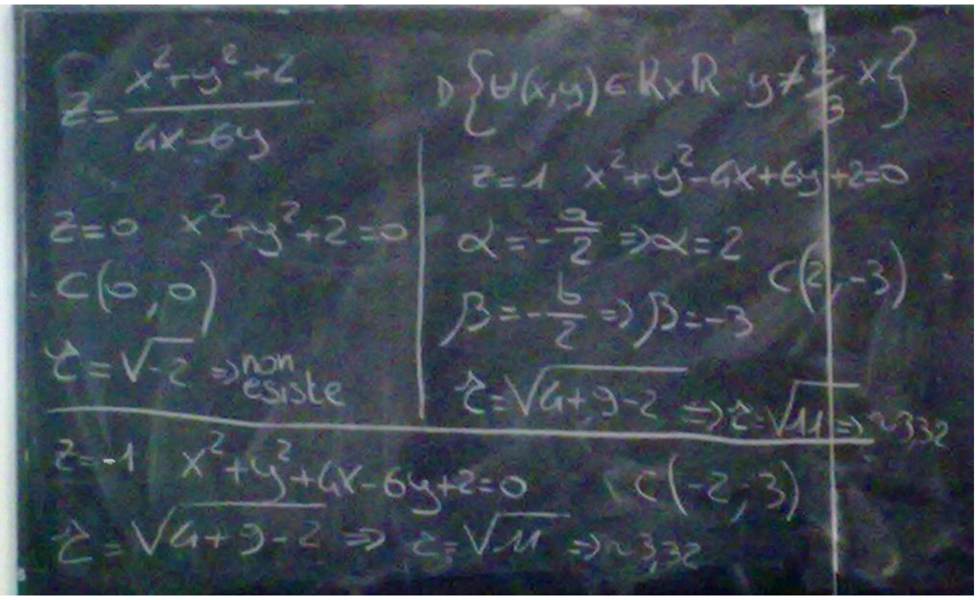





Abbiamo poi studiato il caso generico z=k, verificando che tutte le parabole che costituiscono le linee di livello della funzione $z=\dfrac{x^2-y}{2x+4}$ incontrano la retta esclusa dal dominio nel punto di D.E. (-2;4)



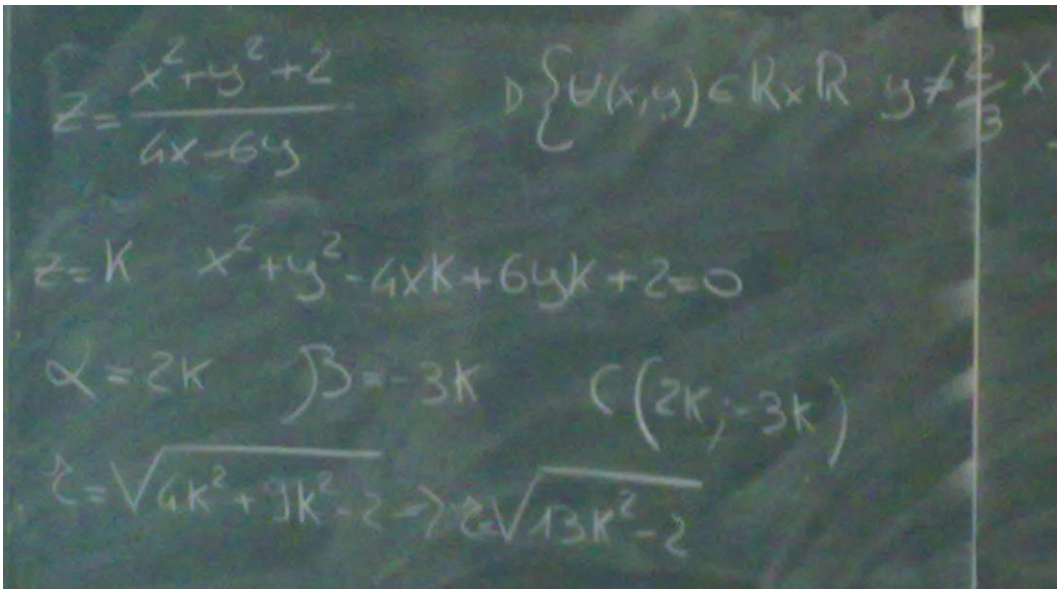
Nelle seguenti figure(21/11/11)abbiamo studiato e rappresentato due linee di livello della funzione $z = \dfrac{x^2 + y^2 + 2}{4x - 6y}$

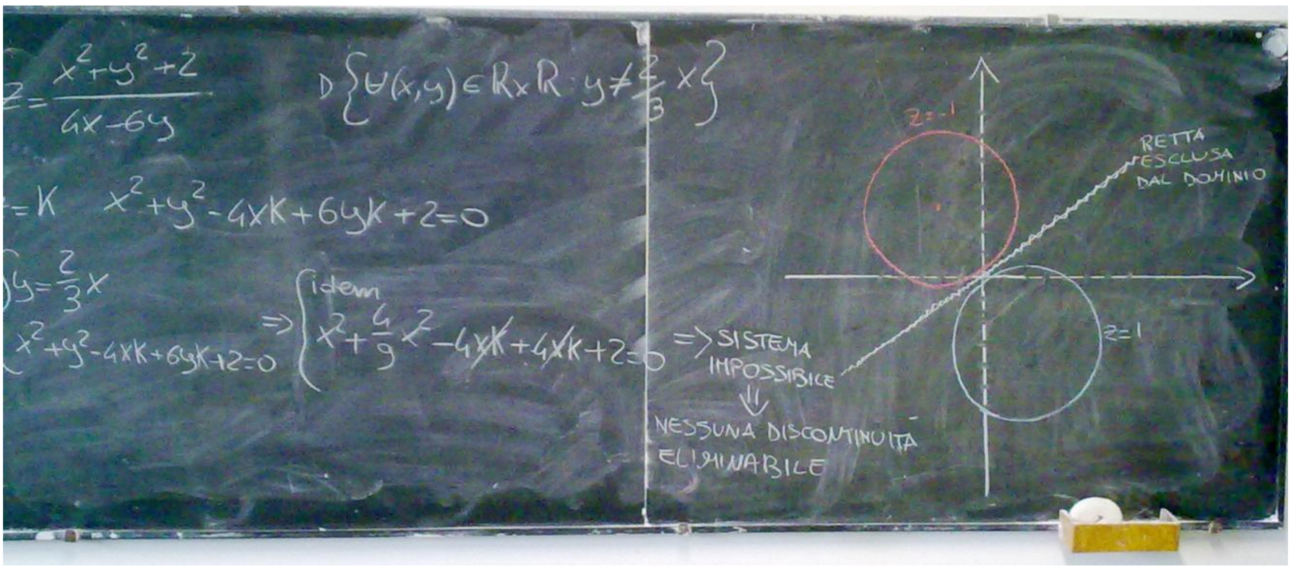



Per z=0 la linea di livello non esiste

Per z=1 e z=-1
le linee di livello sono circonferenze

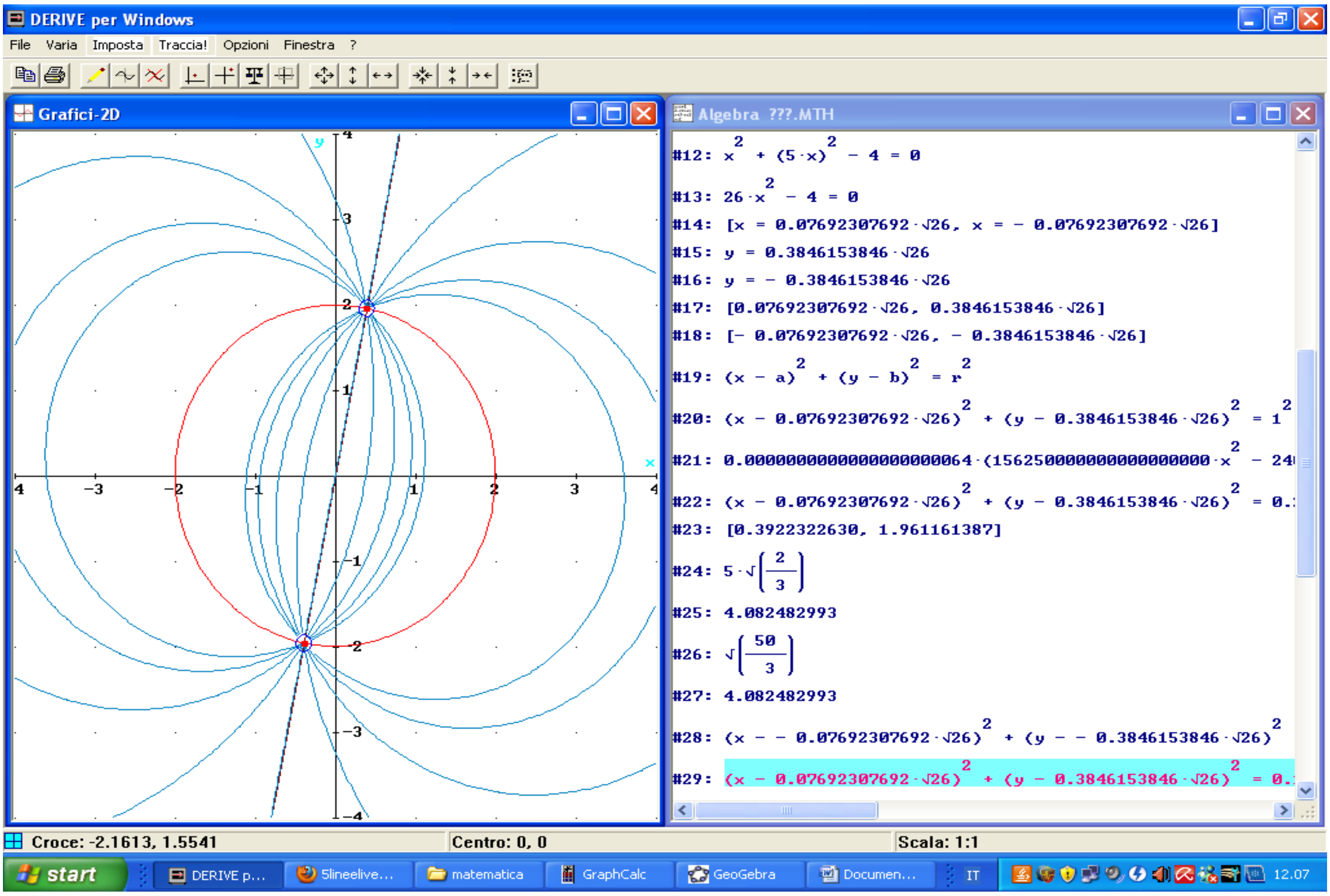
Studiando il caso generico z=k abbiamo potuto constatare che le linee di livello (che sono tutte circonferenze) esistono solo se $k^2 \geq \dfrac{13}{2}$ infatti per $k = 0$ la linea di livello non esiste.



Martedì 22 novembre abbiamo rappresentato, con Derive, alcune linee di livello della funzione $z = \dfrac{5x - y}{x^2 + y^2 - 4}$

Abbiamo rappresentato in rosso la circonferenza esclusa dal dominio, mentre in azzurro abbiamo rappresentato alcune linee di livello




Per z=0 la linea di livello è la retta di equazione $y = 5x$ Per ogni valore di z diverso da 0, la linea di livello è una circonferenza, infatti, per z=k:

$\dfrac{5x - y}{x^2 + y^2 - 4} = k$ cioè: $kx^2 + ky^2 - 5x + y - 4k = 0$ che, in forma canonica, diventa:

se $k \neq 0$ : $x^2 + y^2 - \dfrac{5}{k}x + \dfrac{1}{k}y - 4 = 0$ circonferenza con centro $C\left(\dfrac{5}{2k}; -\dfrac{1}{2k}\right)$ e raggio:

$$r = \sqrt{\frac{25}{4k^2} + \frac{1}{4k^2} + 4} = \sqrt{\frac{26 + 16k^2}{4k^2}}$$ sempre reale (per $\forall k \neq 0$)

intersecando tale circonferenza generica con la circonferenza esclusa dal dominio si possono determinare i due punti di discontinuità eliminabile

se $k = 0$ : come già visto, la linea di livello è la retta $y = 5x$

Esercizi per venerdì 25 novembre

Studia e rappresenta alcune linee di livello delle funzioni:

$z = \dfrac{25 + x^2 + y}{x}$ $\quad z = 3xy$ $\quad z = 3x + y$ $\quad z = \dfrac{xy}{1 - x}$ $\quad z = \dfrac{x^2}{y^2}$

SOLUZIONI