

Determina e rappresenta alcune linee di livello delle seguenti funzioni:

1) $z = 2x - 3y$ 2) $z = x^2 + y^2 - 4x$ 3) $z = x^2 + y - 4$ 4) $z = x^2 + y - 4x$

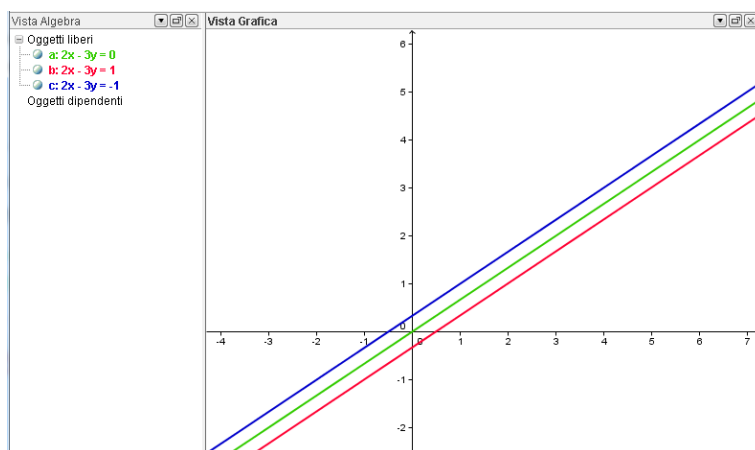
Risoluzione:

1) La funzione $z = 2x - 3y$ ha dominio $D = \{\forall(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ cioè tutto il piano xy

La linea di livello ottenuta ponendo $z = 0$ ha equazione: $y = \frac{2}{3}x$ (rappresentata in verde nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = 1$ ha equazione: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ (rappresentata in rosso nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = -1$ ha equazione: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ (rappresentata in blu nella figura)



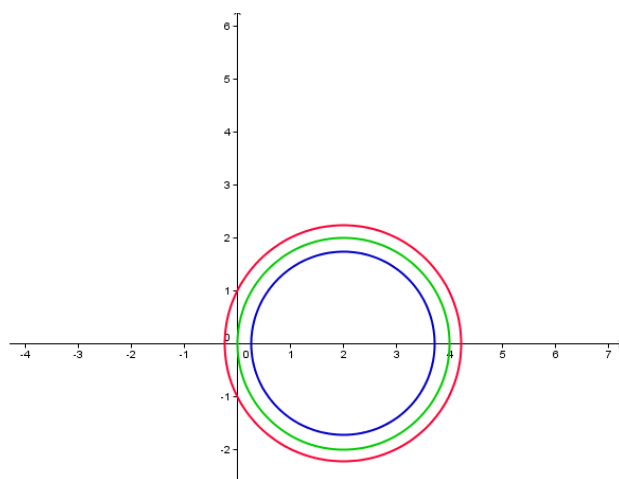
Le linee di livello generiche ($z=k$) della funzione $z = 2x - 3y$ sono rette di equazione $y = \frac{2}{3}x - \frac{k}{3}$ quindi sono tutte parallele fra di loro con coefficiente angolare $2/3$

2) La funzione $z = x^2 + y^2 - 4x$ ha dominio $D = \{\forall(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ cioè tutto il piano xy

La linea di livello ottenuta ponendo $z=0$ ha equazione: $x^2 + y^2 - 4x = 0$ cioè è la circonferenza con centro nel punto (2;0) e raggio 2 (rappresentata in verde nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z=1$ ha equazione: $x^2 + y^2 - 4x = 1$ cioè è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ con centro nel punto (2;0) e raggio $\sqrt{5}$ (rappresentata in rosso nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z=-1$ ha equazione: $x^2 + y^2 - 4x = -1$ cioè è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ con centro nel punto (2;0) e raggio $\sqrt{3}$ (rappresentata in blu nella figura)



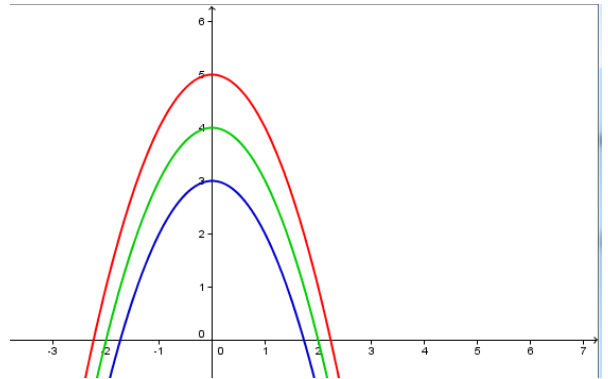
In generale tutte le linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 4x$ sono circonferenze con centro nel punto (2;0)

3) La funzione $z = x^2 + y - 4$ ha dominio $D = \{\forall(x; y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}\}$ cioè tutto il piano xy

La linea di livello ottenuta ponendo $z=0$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4 = 0$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 4$
 che ha vertice nel punto $(0;4)$ e incontra l'asse x nei punti $(-2;0)$
 e $(2;0)$ (rappresentata in verde nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = 1$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4 = 1$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 5$
 che ha vertice nel punto $(0;5)$ e incontra l'asse x nei punti
 $(-\sqrt{5};0)$ e $(\sqrt{5};0)$ (rappresentata in rosso nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = -1$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4 = -1$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 3$
 che ha vertice nel punto $(0;3)$ e incontra l'asse x nei punti
 $(-\sqrt{3};0)$ e $(\sqrt{3};0)$ (rappresentata in blu nella figura)



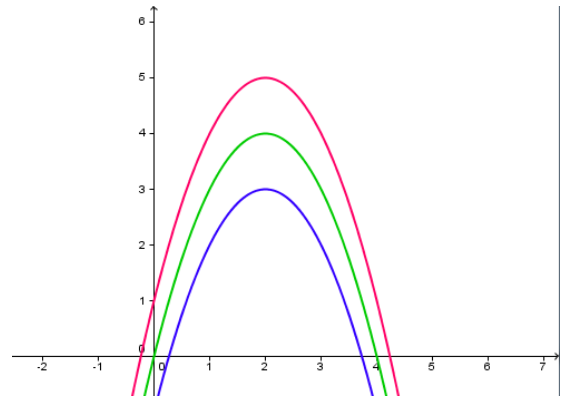
In generale tutte le linee di livello della funzione $z = x^2 + y - 4$ sono parabole con vertice sull'asse y

4) La funzione $z = x^2 + y - 4x$ ha dominio $D = \{\forall(x; y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}\}$ cioè tutto il piano xy

La linea di livello ottenuta ponendo $z=0$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4x = 0$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$
 che ha vertice nel punto $(2;4)$ e passa per l'origine e per il punto
 simmetrico $(4;0)$ (rappresentata in verde nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = 1$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4x = 1$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 1$
 che ha vertice nel punto $(2;5)$ e incontra l'asse y nel punto $(0;1)$ e
 passa per il punto simmetrico $(4;1)$ (rappresentata in rosso nella figura)

La linea di livello ottenuta ponendo $z = -1$ ha equazione:
 $x^2 + y - 4x = -1$ cioè è la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x - 1$
 che ha vertice nel punto $(2;3)$ e incontra l'asse y nel punto $(0;-1)$ e
 passa per il punto simmetrico $(4;-1)$ (rappresentata in blu nella figura)



In generale tutte le linee di livello della funzione $z = x^2 + y - 4x$ sono parabole con vertice sulla retta $x=2$ (che è l'asse di simmetria di tutte le parabole che costituiscono le linee di livello della funzione $z = x^2 + y - 4x$)