Finora abbiamo determinato i massimi e i minimi relativi <u>liberi</u>, cioè non sottoposti a vincoli, quindi all'interno di tutto il dominio della funzione -
Spesso invece, soprattutto nei problemi economici, si dovrà determinare il massimo (o il minimo) ASSOLUTO all'interno di un VINCOLO.
Il vincolo può essere una retta, un segmento o, più spesso, una regione del piano xy data da un sistema di disequazioni

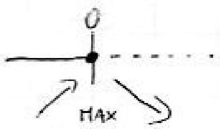
<u>Esempi</u>:

A) Vincolo dato da una retta (o da una curva):
Per determinare il massimo assoluto della funzione $z = x^3 + xy^2 - 3y^2$ sulla retta $x = 2$ del piano xy (che costituisce il vincolo) si sostituisca l'equazione del vincolo nella funzione:

$$z = 2^3 + 2y^2 - 3y^2 \Rightarrow z = -y^2 + 8$$

trovando così una funzione di una variabile, della quale si dovrà determinare il massimo con il metodo usato per le funzioni di una variabile (studio del segno della derivata prima):

$z' = -2y$ $\qquad$ $z' \geq 0$ per $y \leq 0$



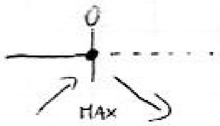
Quindi per $y = 0$ si ha un massimo relativo che è anche massimo assoluto, sul vincolo $x = 2$, in quanto la funzione soggetta al vincolo cresce ovunque per $x < 0$, decresce ovunque per $x > 0$
Se ne deduce che il <u>massimo assoluto</u> della funzione $z = x^3 + xy^2 - 3y^2$ <u>sul vincolo $x = 2$</u> è <u>$(2; 0; +8)$</u>
(il minimo è invece $-\infty$)

nella funzione :

$$z = 2^3 + 2y^2 - 3y^2 \Rightarrow z = -y^2 + 8$$

trovando così una funzione di una variabile, della quale si dovrà determinare il massimo con il metodo usato per le funzioni di una variabile (studio del segno della derivata prima) :

$$z' = -2y \qquad\qquad z' \geq 0 \text{ per } y \leq 0$$



quindi per $y = 0$ si ha un massimo relativo che è anche massimo assoluto, nel vincolo $x = 2$, in quanto la funzione soggetta al vincolo cresce ovunque per $x < 0$, decresce ovunque per $x > 0$

Se ne deduce che il massimo assoluto della funzione $z = x^3 + xy^2 - 3y^2$ nel vincolo $x = 2$ è $(2; 0; +8)$

(il minimo è invece $-\infty$)

ESERCIZIO 11

Calcolare i massimi e minimi vincolati delle seguenti funzioni :

11-A) $z = x^2 + y^2$ vincolo $x + 2y = 5$

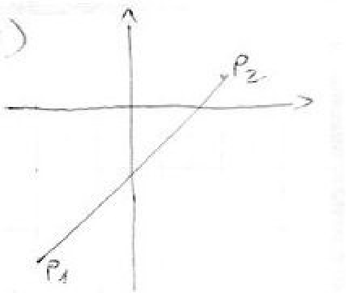
11-B) $z = x^2 + y^2$ vincolo $x^2 + y - 1 = 0$

Risoluzione ([da confrontare solo dopo aver svolto gli esercizi!])

B) vincolo dato da un segmento (o da un tratto di curva)

Per determinare i punti estremanti vincolati della funzione $z = x^3 + 3y^3 - 3xy^2 - 12y + 8$ soggetta al vincolo $y = x - 2$ con $|x| \leq 3$, notiamo che $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ il segmento $\begin{cases} y = x - 2 \\ |x| \leq 3 \end{cases}$

è il segmento di estremi $P_1(-3;-5)$ e $P_2(3;1)$



Sostituiamo ora il vincolo

$y = x - 2$

nella funzione $z = f(x,y)$

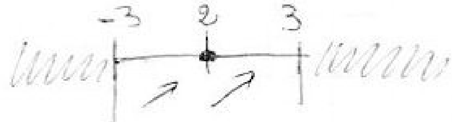
ottenendo:

$z = x^3 + 3(x-2)^3 - 3x(x-2)^2 - 12(x-2) + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = x^3 + 3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 3x(x^2 + 4 - 4x) - 12x + 24 + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = x^3 - 6x^2 + 12x + 8$ con $-3 \le x \le 3$

$z' = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$ $\quad z' \ge 0 \ \forall x$ ($z' = 0$ per $x = 2$)



Nel punto $x = 2$ si ha un flesso ascendente

quindi il minimo assoluto si ha nel punto $x = -3$

il massimo " nel punto $x = 3$

$\Rightarrow$ min assoluto $(-3;-5)$ con $z = -109$

MAX assoluto $(3;1)$ con $z = 17$

(all'interno del vincolo)

ESERCIZIO 12

Determina il massimo e il minimo assoluto delle seguente funzione vincolata:

$z = x^3 + 3xy$ vincolo $x - y = 3$ per $0 \le x \le 6$

Utilizzando il metodo algebrico (della sostituzione) determina il massimo assoluto e il minimo assoluto delle seguenti funzioni vincolate:

1) $z = x^2 + y^2$ con il vincolo $3x + 4y = 10$

2) $z = xy$ con il vincolo $x + y = \sqrt{2}$

3) $z = xy$ con il vincolo $x + y = 6$ per $0 \le x \le 4$

4) $z = x^2 + y^2$ con il vincolo $x - 2y - 5 = 0$ per $0 \le x \le 7$

Risultati

1) minimo assoluto $z = 4$ in $\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)$ 2) minimo assoluto $z = \frac{1}{2}$ in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) minimo assoluto $z = 0$ in $(0;6)$; massimo assoluto $z = 9$ in $(3;3)$

4) minimo assoluto $z = 5$ in $(1;-2)$; massimo assoluto $z = 50$ in $(7;1)$