Per determinare i punti stazionari della funzione $z = 2x^2y + 2y^3 - 4xy - 6y$ risolviamo il sistema ottenuto annullando le due derivate prime:

$$z = 2x^2y + 2y^3 - 4xy - 6y \qquad D: \{\forall (x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

$$z'_x = 4xy - 4y$$

$$z'_y = 2x^2 + 6y^2 - 4x - 6$$

$$\begin{cases} 4xy - 4y = 0 \\ 2x^2 + 6y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y(x-1) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \text{Idem} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + 6y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + 6y^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases}$$

La prima equazione di tale sistema ha due soluzioni, quindi si ottengono due sistemi, uno per ogni soluzione della prima equazione.

L'insieme delle soluzioni del sistema iniziale è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi che hanno come prima equazione una delle due soluzioni della prima equazione e come seconda equazione quella del sistema iniziale:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 - 4x - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ 2 + 6y^2 - 4 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ 6y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \quad y = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ (x-3)(x+1) = 0 \end{cases} \quad x = 3, \quad x = -1$$

$A(3;0)$
$B(-1;0)$

$C\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
$D\left(1; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

I punti A, B, C, D sono tutti i punti stazionari della funzione data.

Per determinare la natura di tali punti, studiamo il determinante hessiano:

$$z'_x = 4xy - 4y \quad \begin{cases} z''_{xx} = 4y \\ z''_{xy} = +4x - 4 \end{cases}$$

$$z'_y = 2x^2 + 6y^2 - 4x - 6 \quad \begin{cases} z''_{yx} = 4x - 4 \\ z''_{yy} = 12y \end{cases}$$

$$H = \begin{vmatrix} 4y & 4x-4 \\ 4x-4 & 12y \end{vmatrix} = 48y^2 - (4x-4)^2$$

$A(3;0)$ $H(A) = -64 < 0$ sella

$B(-1;0)$ $H(B) = -64 < 0$ sella

$C\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $H(C) = 64 > 0$ $z''_{xx}(C) > 0$ minimo

$D\left(1; -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $H(D) = 64 > 0$ $z''_{xx}(D) < 0$ MASSIMO

Quindi C è un minimo, D un massimo, A e B non sono né massimi, né minimi (selle in senso largo, secondo la definizione del libo di testo)