

$$z = x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy = 0 \\ 3x^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x(x+2y) = 0 \begin{cases} x=0 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 3x^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ 3x^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ -2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ 3x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$A(0, -1)$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x - 2x - 2 &= 0 \\ 3x(x+1) - 2(x+1) &= 0 \\ (x+1)(3x-2) &= 0 \end{aligned} \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$B(-1, \frac{1}{2})$$

$$C(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

A, B e C sono i punti STAZIONARI (o CRITICI) della funzione $y = x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$

cioè sono i punti in cui il piano tangente alla superficie è ORIZZONTALE (quindi le due derivate parziali z'_x z'_y sono uguali a zero)

Per stabilire se tali punti critici sono MASSIMI MINIMI o SELLE dobbiamo studiare l'Hessiano (cioè il DETERMINANTE delle derivate seconde)

$$H = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x+6y & 6x \\ 6x & -2 \end{vmatrix} = -2(6x+6y) - 36x^2 = -12x - 12y - 36x^2$$

$$H(A) = -12(-1) = 12 > 0 \quad \text{MAX oppure MINIMO}$$

$$z''_{xx}(A) = 6 \cdot 0 + 6(-1) = -6 < 0 \quad \text{concavità verso il basso}$$

(0, -1) MASSIMO

$$H = -12x - 12y - 36x^2$$

$$B(-1; \frac{1}{2})$$

$$C(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$$

$$H(B) = 12 - 6 - 36 < 0 \Rightarrow B \text{ è una sella}$$

$$H(C) = -8 + 4 - 36 \cdot \frac{4}{9} < 0 \Rightarrow C \text{ è una sella}$$

$$Z = 2x^2 + y^2 - 2xy - 6x$$

$$\begin{cases} 4x - 2y - 6 = 0 \\ 2y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ y = x \end{cases}$$

PUNTO STAZIONARIO (3; 3)

$$H = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \Rightarrow \text{il punto stazionario} \\ \text{è ESTREMANTE} \\ (\text{cioè MAX o MIN})$$

$$Z''_{xx} = 4 > 0 \Rightarrow (3; 3) \text{ è un } \underline{\text{MINIMO}}$$