Domini di funzioni di due variabili

Come abbiamo visto (vedi lezione: Rappresentazione di funzioni di due variabili nello spazio cartesiano) le funzioni di due variabili si possono rappresentare nello spazio cartesiano come superfici: tali superfici sono costituite da tutti i punti (x;y;z) per i quali z=f(x;y) dove (x;y) sono tutte le possibili coppie ordinate di valori reali del piano z=0 alle quali corrisponde un valore reale z.

L'insieme di tutte queste coppie costituisce il dominio o campo di esistenza della funzione.

Generalmente il dominio coincide con il campo di esistenza, ma a volte, soprattutto nelle funzioni economiche, il dominio è un sottoinsieme del campo di esistenza, quindi si può dire che il campo di esistenza è il più ampio dominio che possiamo scegliere per la funzione (vedi pag.13)

Nelle funzioni razionali intere, come $z = x^2 + y^2$, il dominio è dato da tutte le coppie ordinate (x,y) del piano z=0, infatti, scelta comunque una coppia di valori x e y, è sempre possibile, sostituendoli alla funzione $z = x^2 + y^2$ (o ad una qualunque funzione razionale intera) determinare il corrispondente valore reale z

Per esempio, nella funzione $z = x^2 - 2y$ f(1;2) = -3 f(2;1) = 2 f(-1;5) = -9 ma si potrebbe continuare all'infinito…. e ogni coppia ordinata di valori reali avrebbe un corrispondente valore reale z

Quindi le funzioni razionali intere hanno come dominio tutte le coppie del piano xy, cioè:
l'insieme $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re\}$ che si può anche indicare, più semplicemente, con D=$\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$

Nelle altre funzioni dobbiamo escludere le coppie (x,y) per le quali non esiste un corrispondente valore reale z, quindi:

1) Nelle funzioni razionali fratte, dobbiamo escludere le coppie per le quali si annulla il denominatore

Ad esempio, nella funzione $z = \dfrac{5x+y}{3x-2y}$ escluderemo dal dominio tutti i punti della retta $y = \dfrac{3}{2}x$

cioè: $D = \left\{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : y \neq \dfrac{3}{2}x\right\}$

2) Nelle funzioni irrazionali, è necessario porre maggiori o uguali a 0 i radicandi delle radici di ordine pari

Ad esempio, la funzione $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : x^2 + y^2 \geq 1\}$
cioè tutti i punti del piano esclusi quelli interni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1

invece la funzione $z = \sqrt[3]{x-y}$ ha dominio D=$\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ dato che l'indice è dispari e si può quindi accettare anche un valore negativo come radicando (infatti, ad esempio: $\sqrt[3]{-8} = -2$)

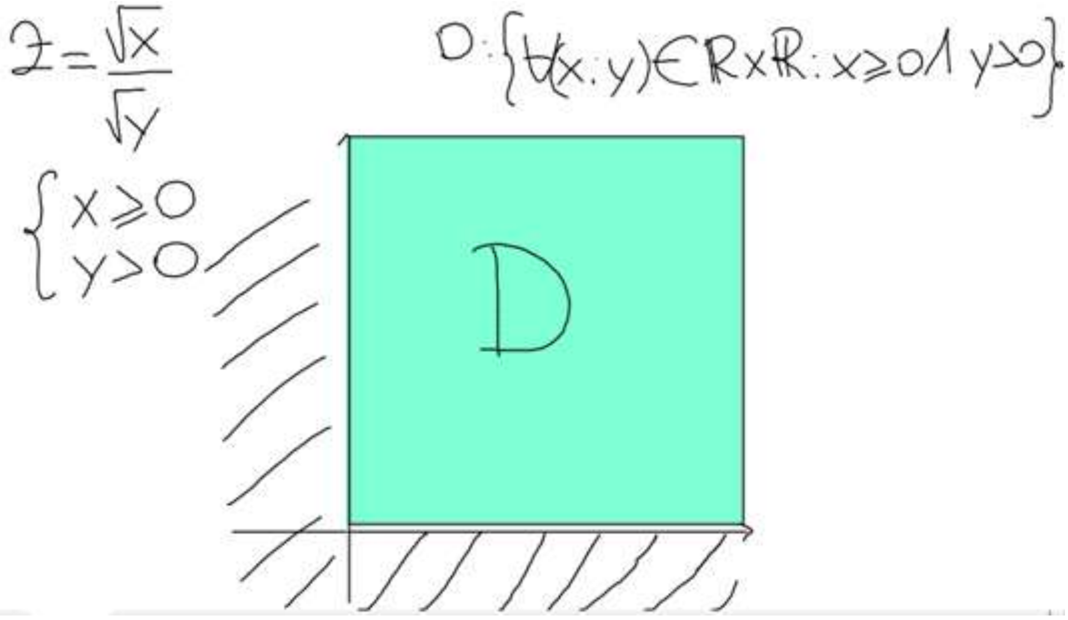
3) Nelle funzioni logaritmiche, è necessario porre maggiori di 0 gli argomenti dei logaritmi

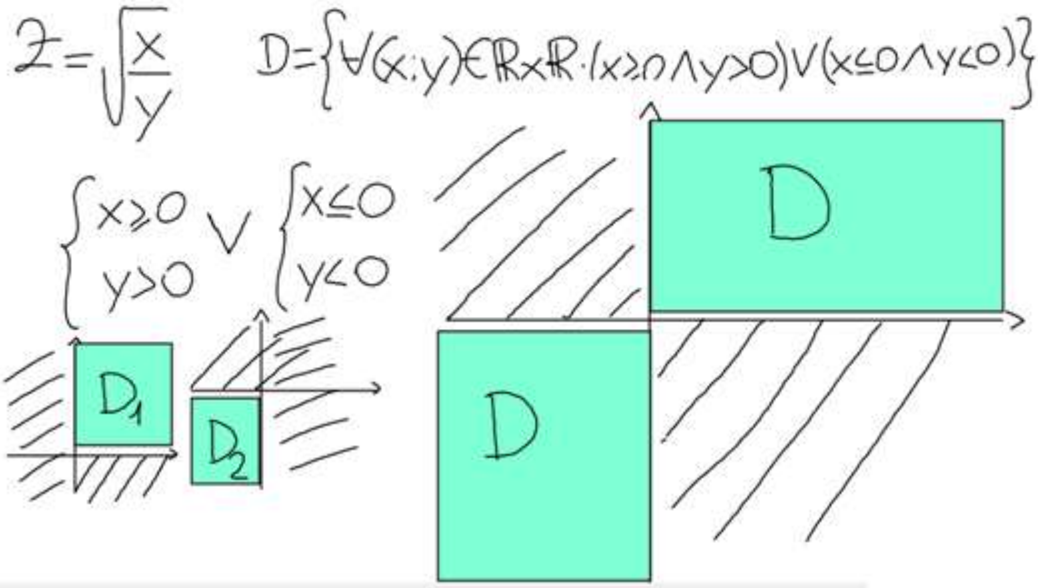
Ad esempio, la funzione $z = x + 3y - \log_2(x-y)$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : y < x\}$
cioè tutti i punti del semipiano che giace sotto la bisettrice del primo e terzo quadrante

la funzione $z = x^2 - 3y + \ln x$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : x > 0\}$
cioè tutti i punti del primo e quarto quadrante con esclusione dell'asse delle ordinate.

Esercizi

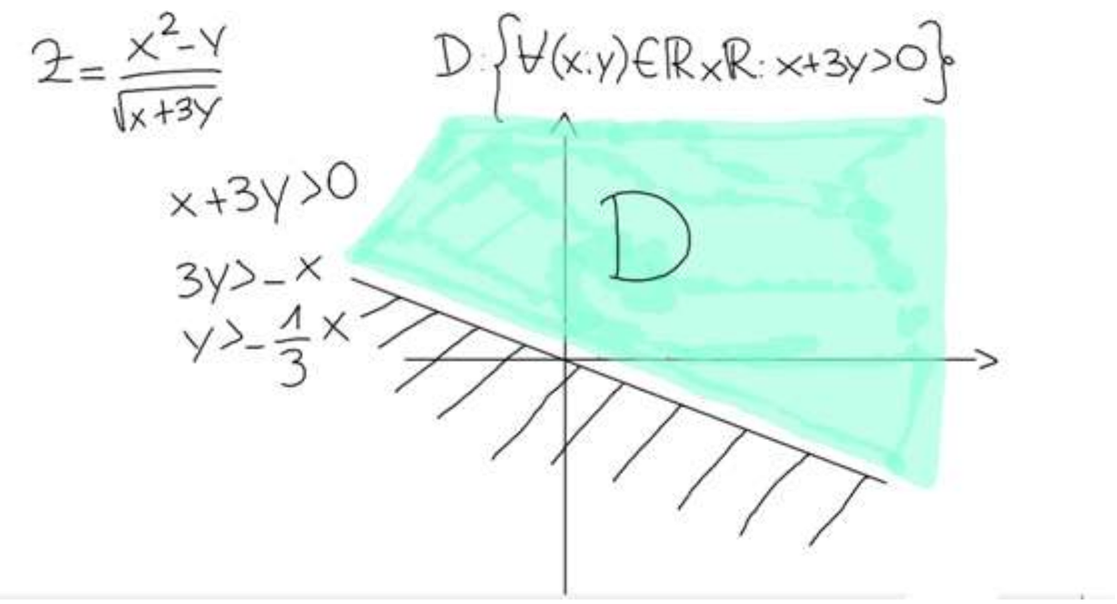
Determiniamo e rappresentiamo il dominio delle funzioni $z = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $\quad z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$ notandone la differenza:





Determiniamo e rappresentiamo il dominio della funzione $z = \dfrac{x^2 - y}{\sqrt{x+3y}}$

Notiamo che, in questo caso, alla condizione che impone al radicando di essere maggiore o uguale a 0, va aggiunta la condizione che il denominatore sia diverso da 0, quindi il radicando x+3y v posto soltanto >0



Altri esercizi da svolgere per mercoledì 11 dicembre:

Determina e rappresenta graficamente il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

A) $z = 3x^2y - 5xy^3 + 7$

B) $z = \dfrac{1}{3 - x + y^2}$

C) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6}$

D) $z = \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - 4y^2}}$

E) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 + 1}}$

F) $z = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 7y^2}}$

facoltativo: G) $z = \sqrt{\dfrac{x + y - 1}{y - x^2}}$

Dopo averli eseguiti puoi controllare le tue soluzioni e i tuoi grafici (vedi soluzioni)