Domini di funzioni di due variabili

Come abbiamo visto (vedi lezione: Rappresentazione di funzioni di due variabili nello spazio cartesiano) le funzioni di due variabili si possono rappresentare nello spazio cartesiano come superfici: tali superfici sono costituite da tutti i punti (x;y;z) per i quali z=f(x;y) dove (x;y) sono tutte le possibili coppie ordinate di valori reali del piano z=0 alle quali corrisponde un valore reale z.

L'insieme di tutte queste coppie costituisce il dominio o campo di esistenza della funzione.

Generalmente il dominio coincide con il campo di esistenza, ma a volte, soprattutto nelle funzioni economiche, il dominio è un sottoinsieme del campo di esistenza, quindi si può dire che il campo di esistenza è il più ampio dominio che possiamo scegliere per la funzione (vedi pag.13)

Nelle funzioni razionali intere, come $z = x^2 + y^2$, il dominio è dato da tutte le coppie ordinate (x,y) del piano z=0, infatti, scelta comunque una coppia di valori x e y, è sempre possibile, sostituendoli alla funzione $z = x^2 + y^2$ (o ad una qualunque funzione razionale intera) determinare il corrispondente valore reale z

Per esempio, nella funzione $z = x^2 - 2y$ f(1;2) = -3 f(2;1) = 2 f(-1;5) = -9 ma si potrebbe continuare all'infinito…. e ogni coppia ordinata di valori reali avrebbe un corrispondente valore reale z

Quindi le funzioni razionali intere hanno come dominio tutte le coppie del piano xy, cioè:
l'insieme $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re\}$ che si può anche indicare, più semplicemente, con D=$\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$

Nelle altre funzioni dobbiamo escludere le coppie (x,y) per le quali non esiste un corrispondente valore reale z, quindi:

1) Nelle funzioni razionali fratte, dobbiamo escludere le coppie per le quali si annulla il denominatore

Ad esempio, nella funzione $z = \dfrac{5x+y}{3x-2y}$ escluderemo dal dominio tutti i punti della retta $y = \dfrac{3}{2}x$

cioè: $D = \left\{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : y \neq \dfrac{3}{2}x\right\}$

2) Nelle funzioni irrazionali, è necessario porre maggiori o uguali a 0 i radicandi delle radici di ordine pari

Ad esempio, la funzione $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : x^2 + y^2 \geq 1\}$
cioè tutti i punti del piano esclusi quelli interni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio 1

invece la funzione $z = \sqrt[3]{x-y}$ ha dominio D=$\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ dato che l'indice è dispari e si può quindi accettare anche un valore negativo come radicando (infatti, ad esempio: $\sqrt[3]{-8} = -2$)

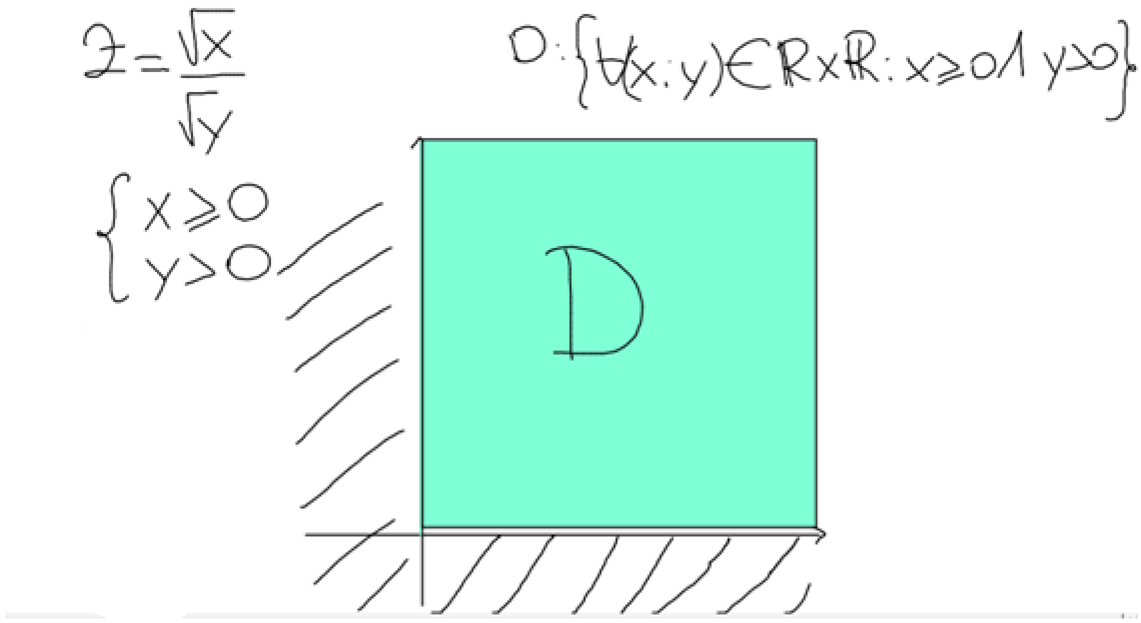
3) Nelle funzioni logaritmiche, è necessario porre maggiori di 0 gli argomenti dei logaritmi

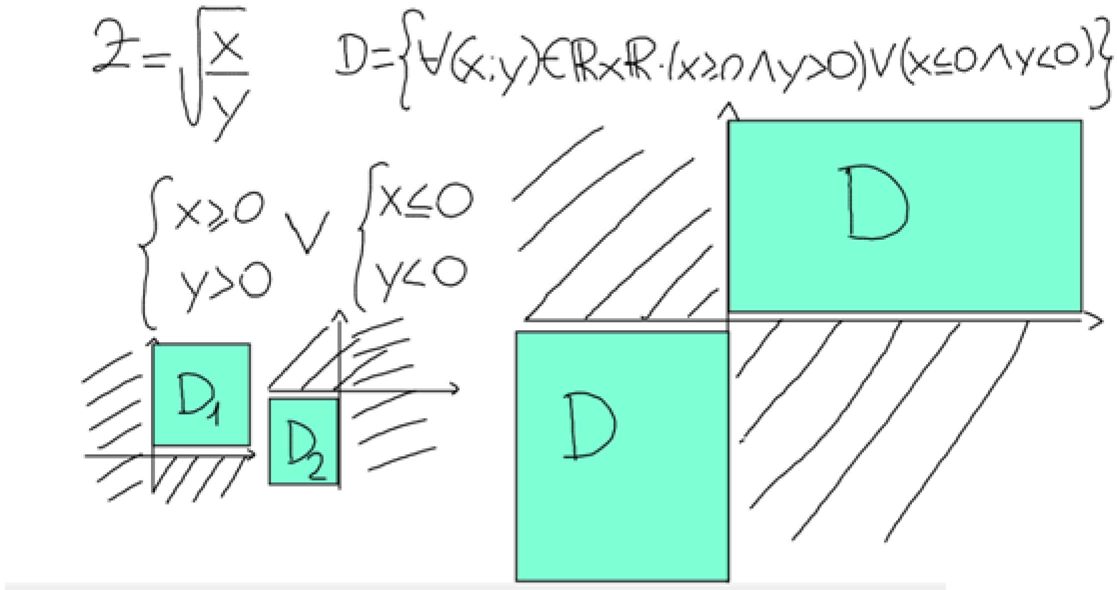
Ad esempio, la funzione $z = x + 3y - \log_2(x-y)$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : y < x\}$
cioè tutti i punti del semipiano che giace sotto la bisettrice del primo e terzo quadrante

la funzione $z = x^2 - 3y + \ln x$ ha dominio $D = \{\forall(x;y) \in \Re \times \Re : x > 0\}$
cioè tutti i punti del primo e quarto quadrante con esclusione dell'asse delle ordinate.

Esercizi

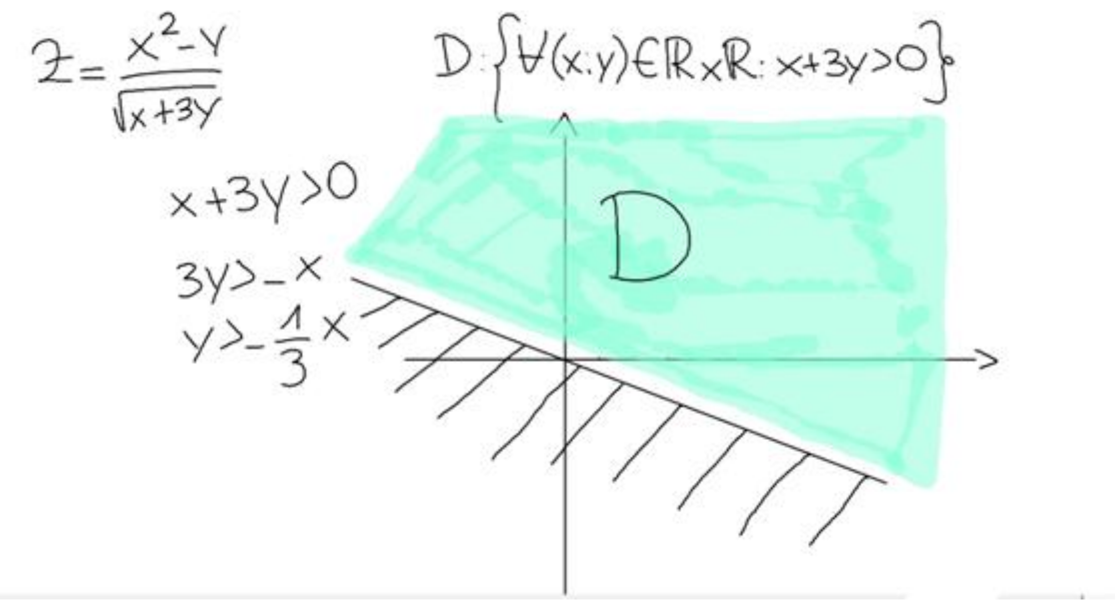
Determiniamo e rappresentiamo il dominio delle funzioni $z = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $\quad z = \sqrt{\frac{x}{y}}$ notandone la differenza:





Determiniamo e rappresentiamo il dominio della funzione $z = \frac{x^2 - y}{\sqrt{x+3y}}$

Notiamo che, in questo caso, alla condizione che impone al radicando di essere maggiore o uguale a 0, va aggiunta la condizione che il denominatore sia diverso da 0, quindi il radicando x+3y v posto soltanto >0



Altri esercizi

Pag. 64 n. 125, 126, 127, 128, 129,130, 131, 132, 134,135,136,137

Pag.66 n.157, 158, 160, 162, 170, 171, 172, 173, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190

Determina e rappresenta graficamente il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

A) $z = 3x^2y - 5xy^3 + 7$

B) $z = \frac{1}{3 - x + y^2}$

C) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6}$

D) $z = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 4y^2}}$

E) $z = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 + 1}}$

F) $z = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 7y^2}}$

G) $z = \sqrt{\frac{x + y - 1}{y - x^2}}$

Dopo averli eseguiti puoi controllare le tue soluzioni e i tuoi grafici (vedi soluzioni)