

Derivate di funzioni di due variabili

Ricordiamo la definizione di **derivata per una funzione di una variabile**:

Data una funzione $y = f(x)$ si definisce derivata di $f(x)$, nel punto di ascissa x_0 , il **limite del rapporto incrementale**, per l'incremento che tende a 0, di $f(x)$ nel punto x_0 , cioè:

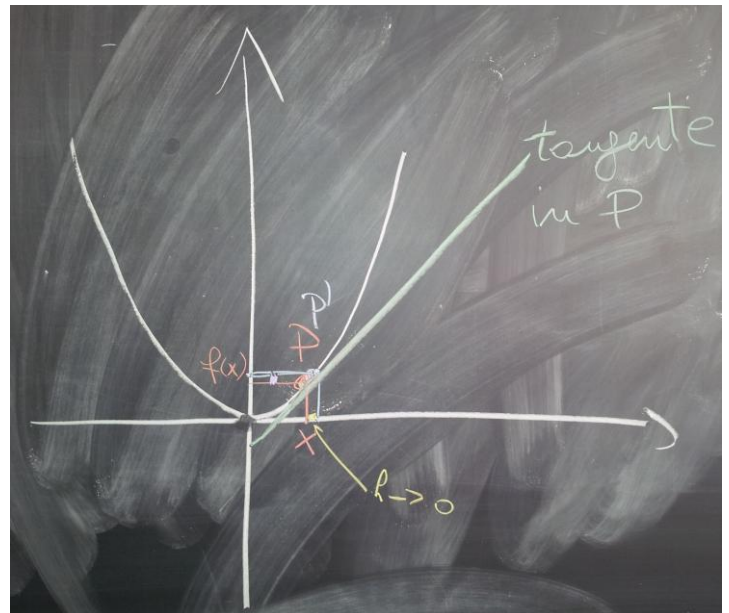
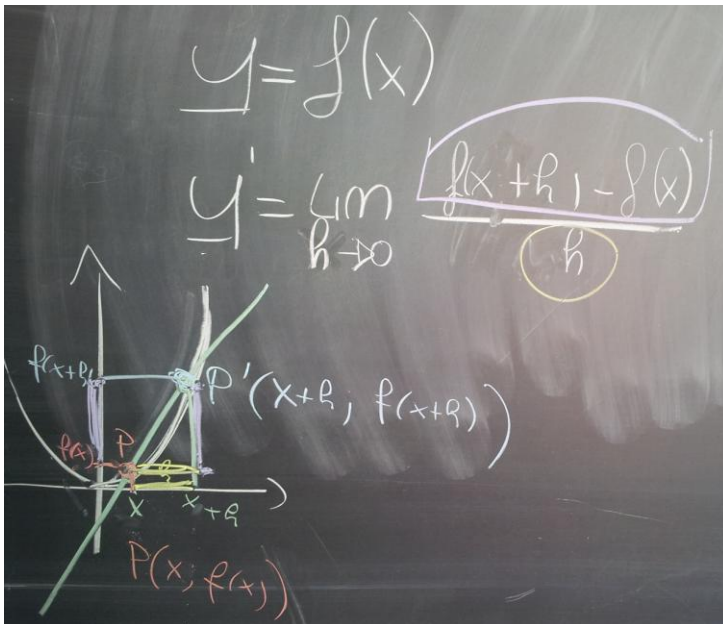
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

x_0 è un valore fissato della variabile x , quindi: il punto P di ascissa x_0 ha coordinate $P(x_0; f(x_0))$;

il punto P' di ascissa $x_0 + h$ (h è l'incremento che attribuiamo a x_0) ha coordinate $P(x_0 + h; f(x_0 + h))$

Il rapporto incrementale tra P e P' è: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e corrisponde al coefficiente angolare della retta passante per P e P' (retta secante)

Calcolare il limite, per $h \rightarrow 0$, di tale rapporto incrementale, significa calcolare il **coefficiente angolare** della retta passante per P e P' con P' che si avvicina sempre più a P fino a sovrapporsi a P , quindi la retta secante che passa per P e P' diventa **retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ in P**



In generale, considerando la derivata, invece che in un punto fissato di ascissa x_0 , in un punto qualunque della curva:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[Approfondimenti sui concetti di limite, continuità e derivabilità \(solo per chi ha capito bene queste pagine\)](#)

DEFINIZIONE DI DERIVATA PARZIALE per una funzione di due variabili:

Data una funzione $z = f(x, y)$ si definisce **derivata parziale** di $f(x, y)$ **rispetto a x** , nel punto (x_0, y_0) del suo dominio, **il limite del rapporto incrementale, rispetto a x , per l'incremento che tende a 0, di $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) :**

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Analogamente la derivata parziale rispetto a y è:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Quindi, per analogia, con l'interpretazione geometrica data nel caso delle funzioni di una variabile, le **due derivate parziali** calcolate in un punto specifico $P(x_0, y_0)$ della superficie che rappresenta la funzione $z = f(x, y)$ corrispondono ai **due coefficienti angolari del piano tangente alla superficie nel punto P**

I disegni di pag. 24 e l'esempio di pag. 24 e 25 in cui viene determinata l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = 4x^2 + y^2 - 6x$ nel suo punto di coordinate $A(2;3;13)$ dovrebbero aiutare a comprendere bene il significato di quanto detto.

ESERCIZIO

Calcola le derivate parziali delle seguenti funzioni:

A) $z = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$

B) $z = \frac{(2x - y)^2}{x^2 - y^2}$

C) $z = \frac{x^2 + y^2}{x - 3}$

D) $z = (x^4 - x^2y^2 + y^4)^3$

SOLUZIONI ([da confrontare solo dopo aver svolto gli esercizi ☺ !!](#))