Derivate di funzioni di due variabili

Ricordiamo la definizione di derivata per una funzione di una variabile:

Data una funzione $y = f(x)$ si definisce derivata di $f(x)$, nel punto di ascissa x_0, il limite del rapporto incrementale, per l'incremento che tende a 0, di $f(x)$ nel punto x_0, cioè:

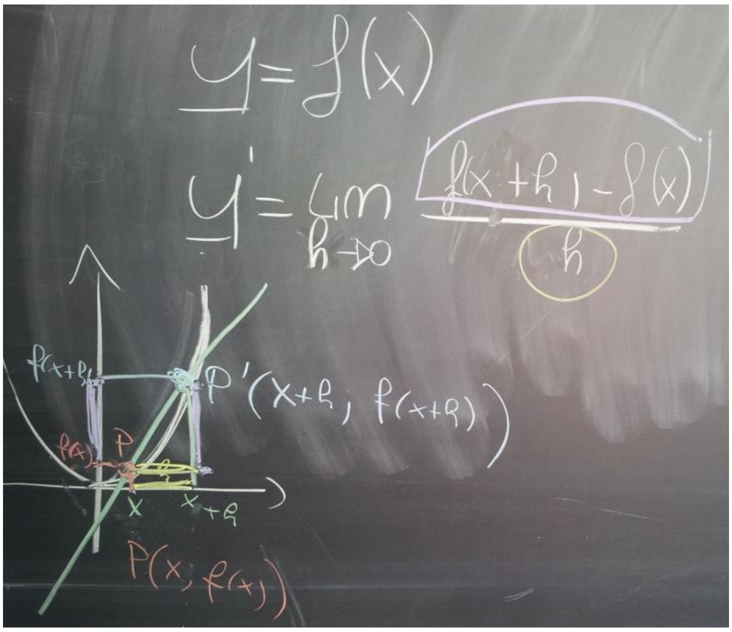
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

x_0 è un valore fissato della variabile x, quindi: il punto P di ascissa x_0 ha coordinate $P(x_0; f(x_0))$;

il punto P' di ascissa $x_0 + h$ (h è l'incremento che attribuiamo a x_0) ha coordinate $P(x_0 + h; f(x_0 + h))$

Il rapporto incrementale tra P e P' è: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e corrisponde al coefficiente angolare della retta passante per P e P' (retta secante)

Calcolare il limite, per $h \to 0$, di tale rapporto incrementale, significa calcolare il coefficiente angolare della retta passante per P e P' con P' che si avvicina sempre più a P fino a sovrapporsi a P, quindi la retta secante che passa per P e P' diventa retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ in P



In generale, considerando la derivata, invece che in un punto fissato di ascissa x_0, in un un punto qualunque della curva:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Approfondimenti sui concetti di limite, continuità e derivabilità (solo per chi ha capito bene queste pagine)

DEFINIZIONE DI DERIVATA PARZIALE per una funzione di due variabili:

Data una funzione $z = f(x, y)$ si definisce derivata parziale di $f(x, y)$ rispetto a x, nel punto (x_0, y_0) del suo dominio, il limite del rapporto incrementale, rispetto a x, per l'incremento che tende a 0, di $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0):

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Analogamente la derivata parziale rispetto a y è:

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Quindi, per analogia, con l'interpretazione geometrica data nel caso delle funzioni di una variabile, le due derivate parziali calcolate in un punto specifico P (x_0, y_0) della superficie che rappresenta la funzione $z = f(x, y)$ corrispondono ai due coefficienti angolari del piano tangente alla superficie nel punto P

I disegni di pag. 24 e l'esempio di pag. 24 e 25 in cui viene determinata l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = 4x^2 + y^2 - 6x$ nel suo punto di coordinate A(2;3;13) dovrebbero aiutare a comprendere bene il significato di quanto detto.

ESERCIZIO

Calcola le derivate parziali delle seguenti funzioni:

A) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

B) $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

C) $z = \dfrac{(2x - y)^2}{x^2 - y^2}$

D) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - 3}$

E) $z = (x^4 - x^2y^2 + y^4)^3$

F) $z = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{y - 1}$

SOLUZIONI (da confrontare solo dopo aver svolto gli esercizi ☺ !!)