

RENDITE (sul libro di testo: da pag. 435 a pag.450)

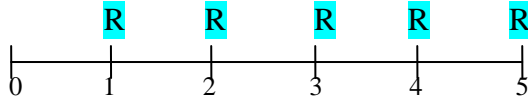
Una **rendita** è una **successione di capitali** (detti rate) **esigibili (cioè disponibili)** ad epoche diverse.

Noi studiamo rendite **periodiche** e a **rata costante**

Il **valore di una rendita** ad una certa epoca è la **somma dei valori di tutte le rate** a quell'epoca.

Se non si specifica nulla la rendita è **immediata** **posticipata**

Esempio :



Questa rendita **inizia oggi (quindi è immediata)** ma essendo **posticipata** la rata viene pagata alla **fine di ogni periodo**.

Se il periodo è l'anno, questa è una **rendita annuale di durata cinque anni**, quindi è costituita da **cinque rate posticipate**

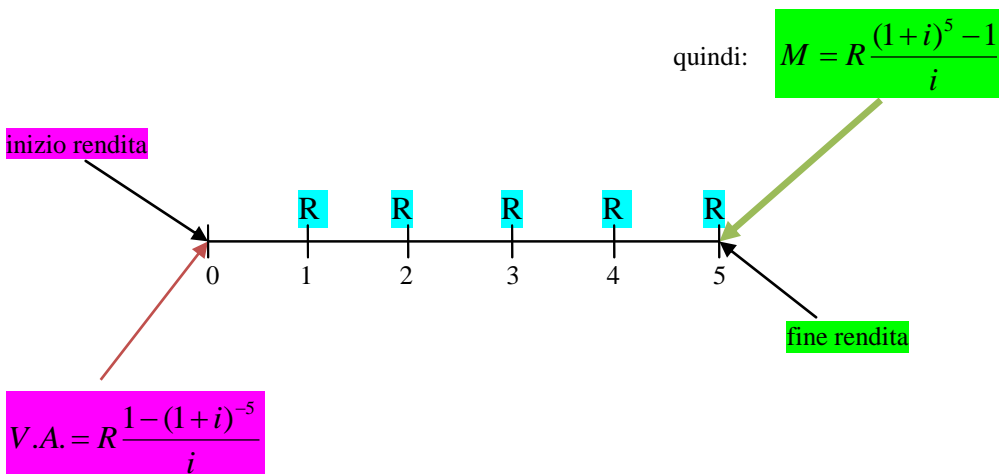
L'**inizio** della rendita è oggi (**anno 0**) la **fine della rendita è l'anno 5** e la prima rata viene pagata all'anno 1 (che corrisponde alla fine dell'anno 0, quindi la scadenza è tra un anno)

Il **montante** di una rendita è il **valore della rendita alla fine** di questa e quindi nel caso di una rendita posticipata corrisponde con il valore della somma di tutte le rate **al momento del pagamento dell'ultima rata**. Nel nostro esempio le 5 rate vanno valutate all'anno 5 quindi:

$$M = R(1+i)^4 + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) + R \quad \text{cioè ponendo } 1+i = u \text{ e raccogliendo } R$$

$$M = R(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) \quad \text{cioè: } M = R \frac{u^5 - 1}{u - 1}$$

$$\text{infatti } (u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)(u - 1) = u^5 - u^4 + u^4 - u^3 + u^3 - u^2 + u^2 - u + u - 1 = u^5 - 1$$



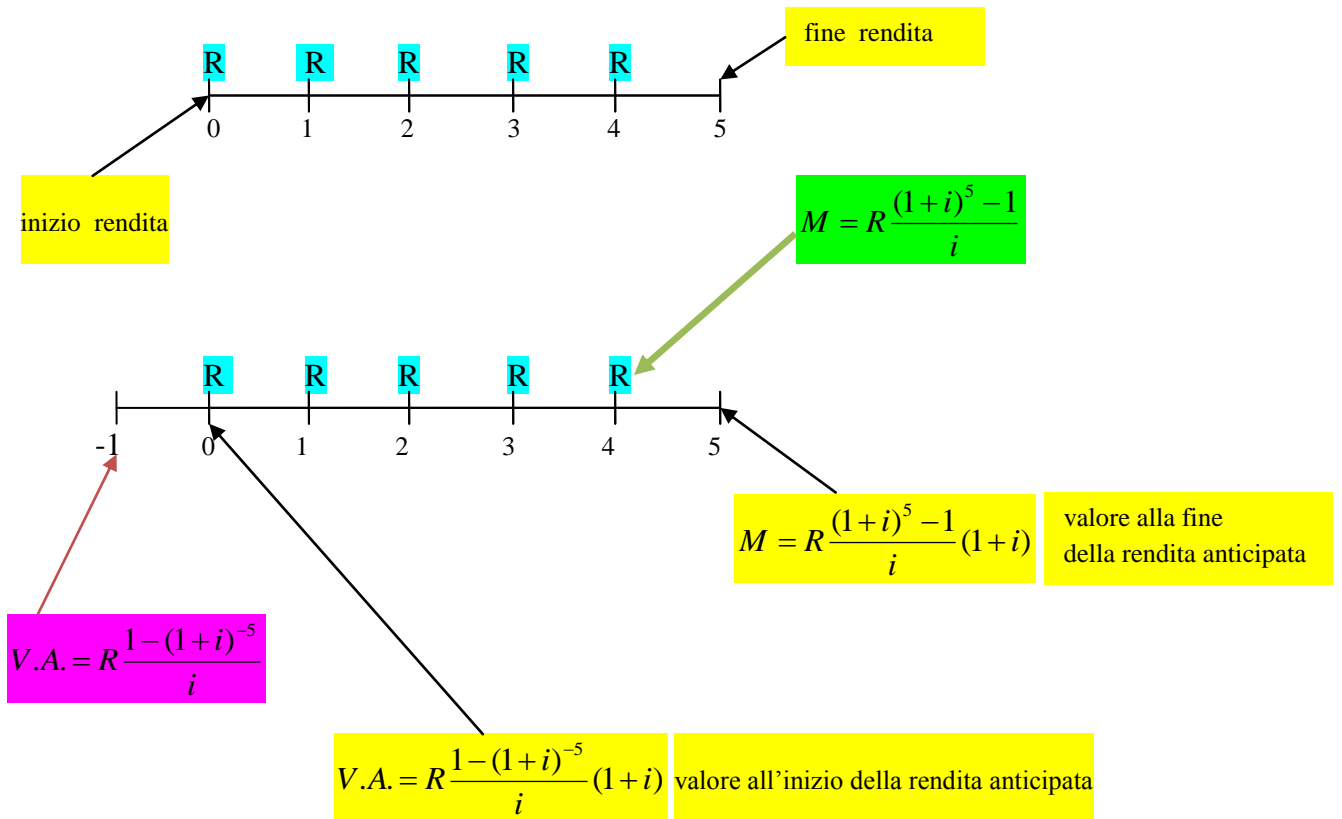
Il **valore attuale** di una rendita è il **valore della rendita all'inizio** di questa e quindi nel caso di una rendita posticipata corrisponde con il valore della somma di tutte le rate **un periodo prima del pagamento della prima rata**.

Per determinare tale valore attuale basta attualizzare il montante, cioè nel nostro esempio valutare all'anno 0 il valore

della rendita all'anno 5, cioè $V.A. = M(1+i)^{-5}$ quindi: $V.A. = R \frac{(1+i)^5 - 1}{i} (1+i)^{-5}$ cioè:

$$V.A. = R \frac{(1+i)^{5-5} - (1+i)^{-5}}{i} \quad \text{quindi: } V.A. = R \frac{(1+i)^0 - (1+i)^{-5}}{i} \quad \text{cioè: } V.A. = R \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i}$$

Se la rendita è **anticipata** ogni rata è esigibile all'inizio dell'anno, quindi la situazione è la seguente:



In sostanza una rendita annuale anticipata che inizia oggi corrisponde ad una rendita annuale posticipata che è iniziata un anno fa

Per risolvere i problemi con le rendite:

- Individuare la **periodicità** della rata (annuale, semestrale, mensile...) data dal testo e **non modificarla**
- Individuare il **numero di rate** (se il problema dà il tempo in anni e la rata è mensile, gli anni andranno moltiplicati per i mesi per trovare il numero di rate)
- **Adattare il tasso alla periodicità** delle rate (se le rate sono semestrali il tasso deve essere semestrale effettivo)

Le due formule da utilizzare sono:

$$M = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

che, comunque sia strutturata la rendita (immediata o differita, anticipata o posticipata) indica, in ogni caso, il valore della rendita nel momento della scadenza dell'ultima rata

$$V.A. = M(1+i)^{-n} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

che, comunque sia strutturata la rendita (immediata o differita, anticipata o posticipata) indica, in ogni caso, il valore della rendita un periodo prima della scadenza della prima rata

Per la **rendita perpetua** considerando che il numero di rate è infinito si ha:

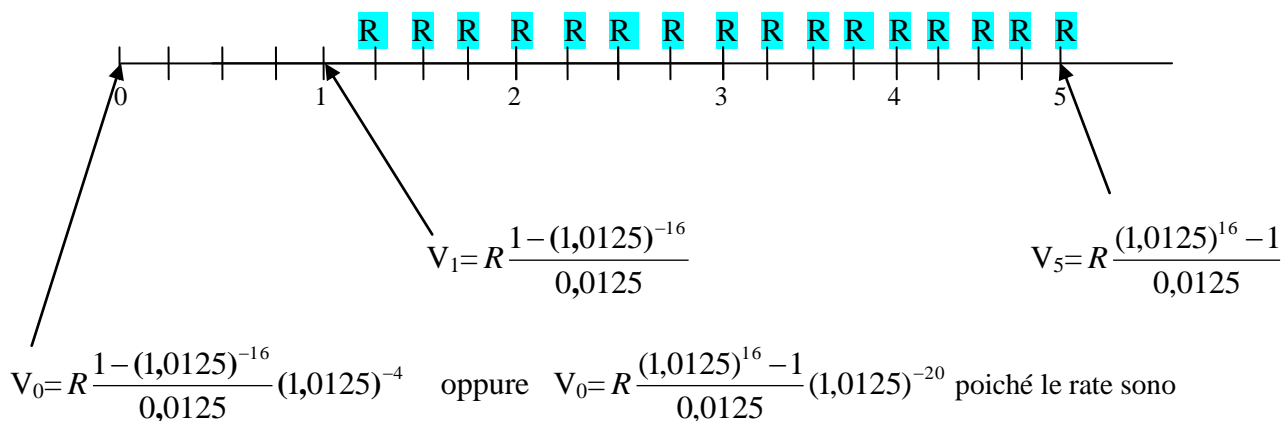
$$(1+i)^n = \infty \Rightarrow (1+i)^{-n} = 0$$

quindi $V.A. = \frac{R}{i}$

Esempi

- 1) Un debito di 20.000 euro deve essere saldato mediante rate trimestrali posticipate che iniziano tra un anno e durano quattro anni con tasso nominale annuo convertibile trimestralmente del 5%
Determina il valore della rata.

La situazione è la seguente:



posticipate la **prima rata** si versa **tra un anno e tre mesi**. L'equazione risolvente è:

$$20.000 = R \frac{1 - (1,0125)^{-16}}{0,0125} (1,0125)^{-4} \quad \text{oppure} \quad 20.000 = R \frac{(1,0125)^{16} - 1}{0,0125} (1,0125)^{-20}$$

da entrambe si ricava: $R = 1457,59$ euro

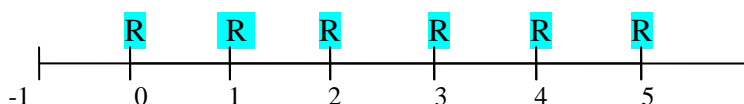
- 2) Oggi inizio a versare 100 euro al mese per 3 anni. Quanto avrò esattamente 2 anni dopo l'ultimo versamento, se il tasso è 4% nominale annuo convertibile trimestralmente?

$$i_{12} = 0,003322284$$

Il valore della rendita al momento dell'ultima rata è $100 \frac{(1 + i_{12})^{36} - 1}{i_{12}} = 3817,40$

Due anni dopo l'ultimo versamento il valore della rendita è $100 \frac{(1 + i_{12})^{36} - 1}{i_{12}} (1 + i_{12})^{24} = 4133,69$

- 3) All'inizio di ogni anno, a partire da oggi, un nostro investimento ci rende 500 euro per 6 anni. Quanto vale oggi questo investimento al tasso del 3% annuo ?



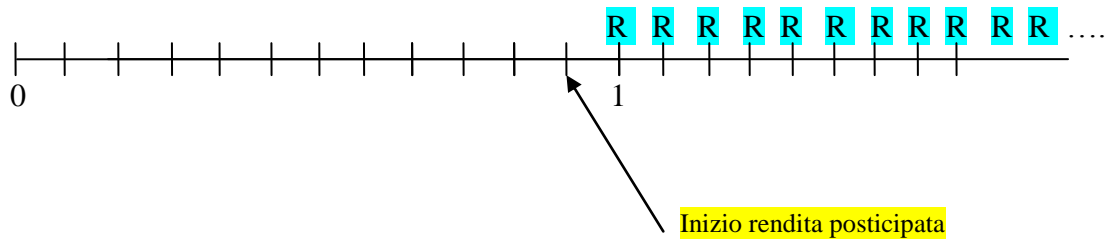
Valore al momento dell'ultima rata: $V_5 = 500 \frac{(1,03)^6 - 1}{0,03} = 3234,20$ $V_0 = V_5 (1,03)^{-5} = 2789,85$

Oppure:

Montante della rendita anticipata: $M = V_6 = 500 \frac{(1,03)^6 - 1}{0,03} (1,03) = 3331,23$ $V_0 = V_6 (1,03)^{-6} = 2789,85$

L'investimento, quindi la rendita, oggi vale 2789,85 euro.

4) Quanto vale oggi, al tasso di valutazione del 4% annuo, un terreno che inizierà a rendere 100 euro al mese esattamente tra un anno?



La rendita è una rendita **anticipata che inizia tra un anno** e corrisponde ad una rendita posticipata che inizia **tra undici mesi**, quindi:

$$V.A. = \frac{100}{0,0032737} (1,0032737)^{-11} = 29.467,41$$

Esercizi

- 1 – Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita immediata posticipata di rata annuale 300 euro della durata di 4 anni [M= 1255,09 V.A. = 1115,13]
- 2- Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita immediata anticipata di rata annuale 500 euro della durata di 6 anni [M=3331,23 V.A.=2789,85]
- 3- Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, differita di tre anni, di rata annuale 600 euro della durata di 5 anni [M=3185,48 V.A.=2514,65]
- 4- Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita anticipata, differita di quattro anni, di rata annuale 600 euro della durata di 5 anni [M=3281,05 (a fine rendita, anno9) V.A.=2514,65]
- 5- Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita immediata posticipata costituita da 12 rate trimestrali di 150 euro [M=1875,28 V.A.= 1716,14]
- 6- Calcola, al tasso del 3% annuale effettivo, il valore attuale e il montante di una rendita immediata posticipata di rata trimestrale di 150 euro e della durata di tre anni [M=1875,28 V.A.= 1716,14]
- 7- Calcola, al tasso del 3% nominale annuo convertibile trimestralmente, il valore attuale e il montante di una rendita immediata posticipata di rata trimestrale di 150 euro e della durata di tre anni [M=1876,14 V.A.=1715,24]
- 8- Calcola, al tasso del 3% nominale annuo convertibile trimestralmente, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, differita di sei mesi, di rata trimestrale di 150 euro e della durata di tre anni [M=1876,14 V.A.= 1689,80]
- 9- Calcola, al tasso del 3% nominale annuo convertibile trimestralmente, il valore attuale e il montante di una rendita anticipata, differita di nove mesi, di rata trimestrale di 150 euro e della durata di tre anni [M=1890,21 V.A.= 1689,80]
- 10- Calcola, al tasso del 3% nominale annuo convertibile trimestralmente, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, differita di un anno, di rata trimestrale di 150 euro e della durata di tre anni [M=1876,14 V.A.= 1664,73]
- 11- Calcola, al tasso del 4% effettivo annuale, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, differita di due anni, di rata mensile di 100 euro e della durata di tre anni [M=3814,11 V.A.= 3134,92]
- 12- Calcola, al tasso del 5% effettivo annuale, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, immediata, di rata semestrale di 300 euro e della durata di quattro anni [M=2618,01 V.A.= 2153,85]
- 13- Calcola, al tasso nominale annuo del 4% convertibile mensilmente, il valore attuale e il montante di una rendita anticipata, differita di un anno e sei mesi, di rata mensile di 100 euro e della durata di due anni e tre mesi [M=2829,72 V.A.= 2436,17]
- 14- Calcola, al tasso del 2% effettivo annuale, il valore attuale e il montante di una rendita posticipata, differita di due anni, di rata bimestrale di 150 euro e della durata di due anni [M=1833,03 V.A. =1693,44]
- 15- Calcola il V.A e il montante di una rendita di rata semestrale di 100 euro differita di un anno, posticipata, di durata tre anni, al tasso del 5% annuale effettivo [M=638,29 V.A.= 525,12]