RENDITE

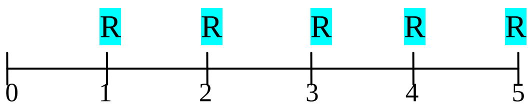
Una rendita è una successione di capitali (detti rate) esigibili (cioè disponibili) ad epoche diverse.

Noi studiamo rendite periodiche e a rata costante

Il valore di una rendita ad una certa epoca è la somma dei valori di tutte le rate a quell'epoca.

Se non si specifica nulla la rendita è immediata posticipata

Esempio :



Questa rendita inizia oggi (quindi è immediata) ma essendo posticipata la rata viene pagata alla fine di ogni periodo.

Se il periodo è l'anno, questa è una rendita annuale di durata cinque anni, quindi è costituita da cinque rate posticipate

L'inizio della rendita è oggi (anno 0) la fine della rendita è l'anno 5 e la prima rata viene pagata all'anno 1 (che corrisponde alla fine dell'anno 0, quindi la scadenza è tra un anno)

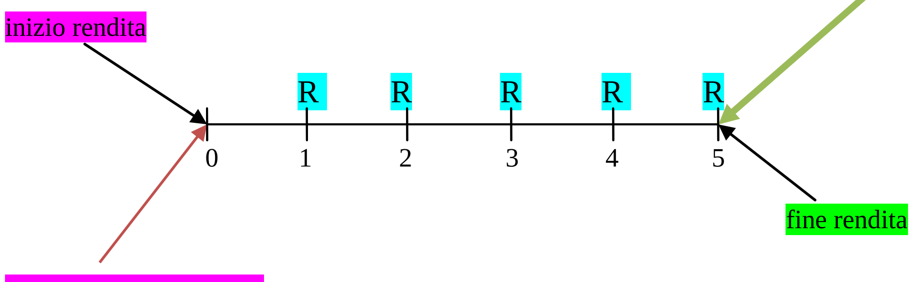
Il montante di una rendita è il valore della rendita alla fine di questa e quindi nel caso di una rendita posticipata corrisponde con il valore della somma di tutte le rate al momento del pagamento dell'ultima rata. Nel nostro esempio le 5 rate vanno valutate all'anno 5 quindi:

$M = R(1+i)^4 + R(1+i)^3 + R(1+i)^2 + R(1+i) + R$ cioè ponendo $1+i=u$ e raccogliendo R

$M = R(u^4+u^3+u^2+u+1)$ cioè: $M = R\dfrac{u^5-1}{u-1}$ (vedi foglio Excel)

infatti $(u^4+u^3+u^2+u+1)(u-1) = u^5-u^4+u^4-u^3+u^3-u^2+u^2-u+u-1 = u^5-1$

quindi: $\boxed{M = R\dfrac{(1+i)^5-1}{i}}$



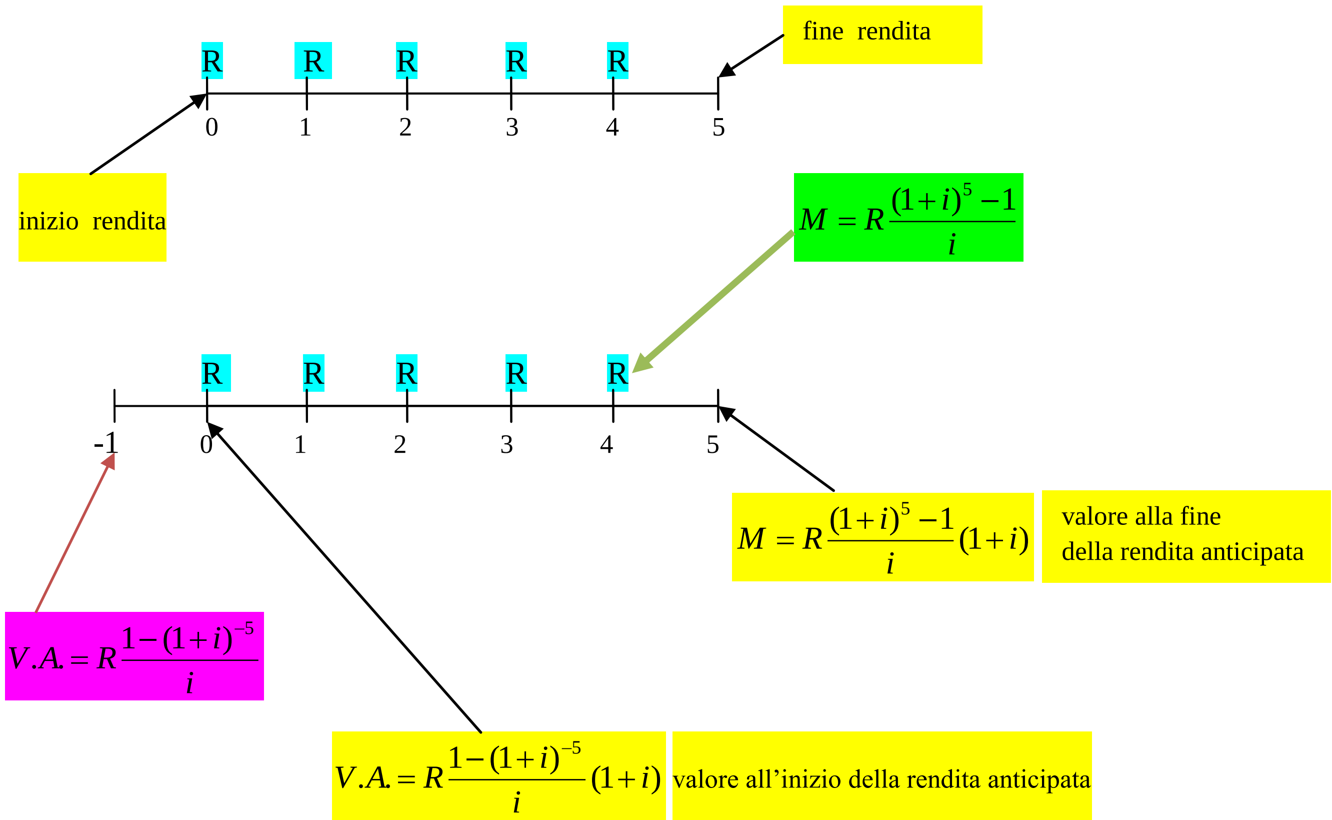
$\boxed{V.A. = R\dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i}}$

Il valore attuale di una rendita è il valore della rendita all'inizio di questa e quindi nel caso di una rendita posticipata corrisponde con il valore della somma di tutte le rate un periodo prima del pagamento della prima rata.

Per determinare tale valore attuale basta attualizzare il montante, cioè nel nostro esempio valutare all'anno 0 il valore della rendita all'anno 5 , cioè $V.A. = M(1+i)^{-5}$ quindi: $V.A. = R\dfrac{(1+i)^5-1}{i}(1+i)^{-5}$ cioè:

$V.A. = R\dfrac{(1+i)^{5-5}-(1+i)^{-5}}{i}$ quindi: $V.A. = R\dfrac{(1+i)^0-(1+i)^{-5}}{i}$ cioè: $\boxed{V.A. = R\dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i}}$

Se la rendita è anticipata ogni rata è esigibile all'inizio dell'anno, quindi la situazione è la seguente:



In sostanza una rendita annuale anticipata che inizia oggi corrisponde ad una rendita annuale posticipata che è iniziata un anno fa

Per risolvere i problemi con le rendite:

- Individuare la periodicità della rata (annuale, semestrale, mensile….) data dal testo e non modificarla
- Individuare il numero di rate (se il problema dà il tempo in anni e la rata è mensile, gli anni andranno moltiplicati per i mesi per trovare il numero di rate)
- Adattare il tasso alla periodicità delle rate (se le rate sono semestrali il tasso deve essere semestrale effettivo)

Le due formule da utilizzare sono:

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

che, comunque sia strutturata la rendita (immediata o differita, anticipata o posticipata) indica, in ogni caso, il valore della rendita nel momento della scadenza dell'ultima rata

$$V.A. = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

che, comunque sia strutturata la rendita (immediata o differita, anticipata o posticipata) indica, in ogni caso, il valore della rendita un periodo prima della scadenza della prima rata

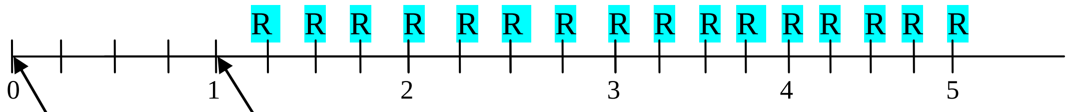
Per la rendita perpetua considerando che il numero di rate è infinito si ha: $(1+i)^n = \infty \Rightarrow (1+i)^{-n} = 0$

quindi $V.A. = \frac{R}{i}$

Esempi

1) Un debito di 20.000 euro deve essere saldato mediante rate trimestrali posticipate che iniziano tra un anno e durano quattro anni con tasso nominale annuo convertibile trimestralmente del 5%
Determina il valore della rata.

La situazione è la seguente:



$$R\frac{1-(1{,}0125)^{-16}}{0{,}0125}$$

$$R\frac{1-(1{,}0125)^{-16}}{0{,}0125}(1{,}0125)^{-4}$$

poiché le rate sono posticipate, la prima rata si versa tra un anno e tre mesi

L'equazione risolvente è $20.000 = R\frac{1-(1{,}0125)^{-16}}{0{,}0125}(1{,}0125)^{-4}$ da cui si ricava: R= 1457,59 euro

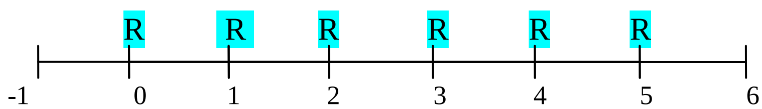
2) Oggi inizio a versare 100 euro al mese per 3 anni. Quanto avrò esattamente 2 anni dopo l'ultimo versamento, se il tasso è 4% nominale annuo convertibile trimestralmente?

$$i_{12} = 0{,}003322284$$

Il valore della rendita al momento dell'ultima rata è $100\frac{(1+i_{12})^{36}-1}{i_{12}} = 3817{,}40$

Due anni dopo l'ultimo versamento il valore della rendita è $100\frac{(1+i_{12})^{36}-1}{i_{12}}(1+i_{12})^{24} = 4133{,}69$

3) All'inizio di ogni anno, a partire da oggi, un nostro investimento ci rende 500 euro per 6 anni. Quanto vale oggi questo investimento al tasso del 3% annuo ?

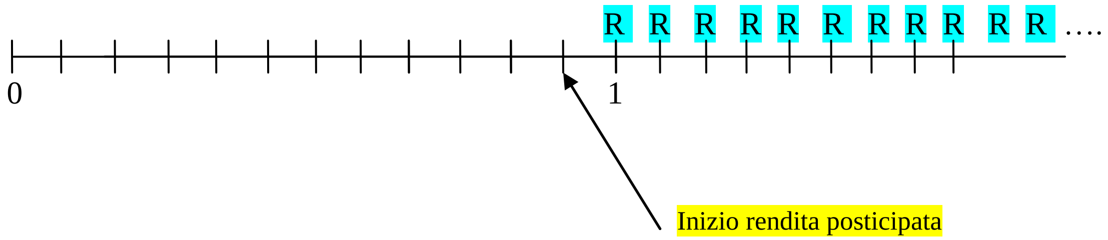


$$V_{-1} = 500\frac{1-(1{,}03)^{-6}}{0{,}03} = 2708{,}60 \qquad V_0 = V_{-1}(1{,}03) = 2789{,}85$$

Oppure : $V_5 = 500\frac{(1{,}03)^{6}-1}{0{,}03} = 3234{,}20 \qquad V_0 = V_5(1{,}03)^{-5} = 2789{,}85$

L'investimento, quindi la rendita,oggi vale 2789,85 euro.

4) Quanto vale oggi, al tasso di valutazione del 4% annuo, un terreno che inizierà a rendere 100 euro al mese esattamente tra un anno?



La rendita è una rendita anticipata che inizia tra un anno e corrisponde ad una rendita posticipata che inizia tra undici mesi, quindi:

$$V.A. = \frac{100}{0{,}0032737}(1{,}0032737)^{-11} = 29.467{,}41$$