DERIVATA

PREMESSA

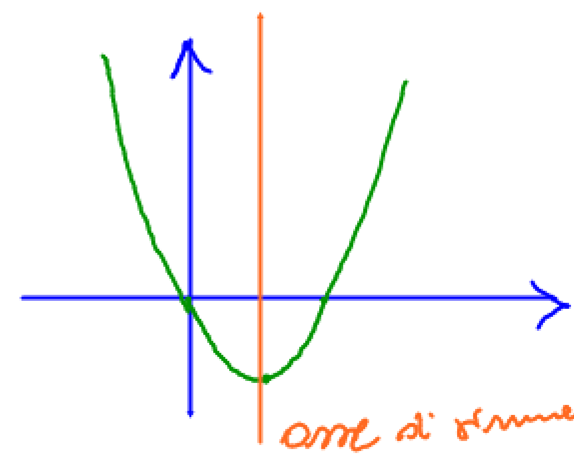
La derivata di una funzione $y=f(x)$ è un'altra funzione che serve a trovare gli intervalli in cui la funzione originaria cresce o decresce e quindi serve a trovare i massimi e i minimi della funzione (per noi i massimi e i minimi di una funzione sono particolarmente importanti in quanto studieremo le funzioni economiche (utile, costo unitario, ... etc...))

ESEMPIO

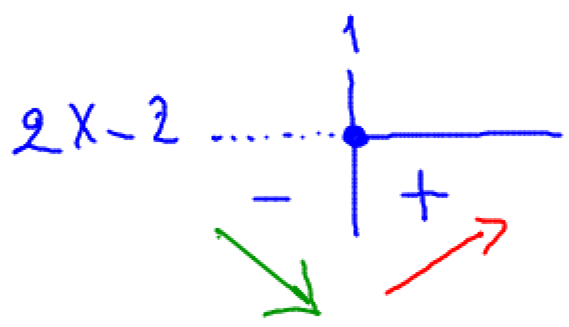
$y = x^2 - 2x$ (conosciamo già questa funzione che è una parabola il cui asse di simmetria è $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 1$ il vertice è $(1; -1)$)

La derivata di $y = x^2 - 2x$

è $y' = 2x - 2$ (poi vi spiego perché ....)



Studiamo il segno di tale derivata



Se la derivata è negativa la funzione originaria decresce

Se la derivata è positiva la funzione cresce

Se la derivata è uguale a 0 si ha un MASSIMO, o un MINIMO o un FLESSO CON TANGENTE ORIZZONTALE

SECONDO ESEMPIO

funzione $y = 3x + 2$ è una retta crescente

La derivata di $y = 3x + 2$ è $y' = 3$ quindi 3 ——— + derivata sempre positiva funzione sempre crescente

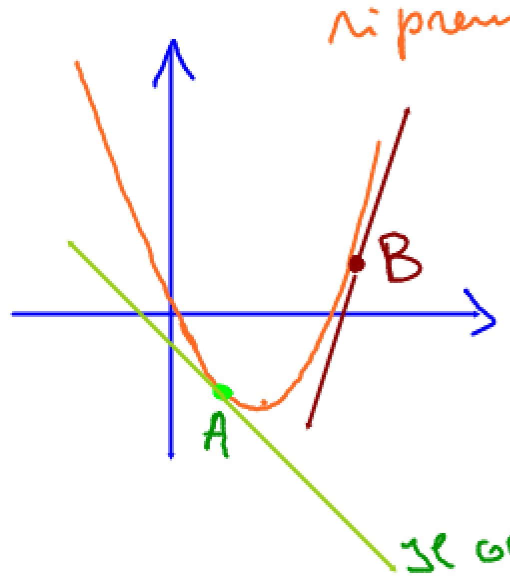
altro esempio

$y = -2x + 5$ la derivata è $y' = -2$ quindi -2 ...... − derivata negativa funzione decrescente

Per una funzione lineare (retta) la derivata corrisponde con il coefficiente angolare e per una parabola?

La parabola non ha coeff. angolare, quindi il "trucco" è considerare il coefficiente angolare della retta tangente in un punto della parabola (tale coeff. ang. varia al variare del punto considerato)

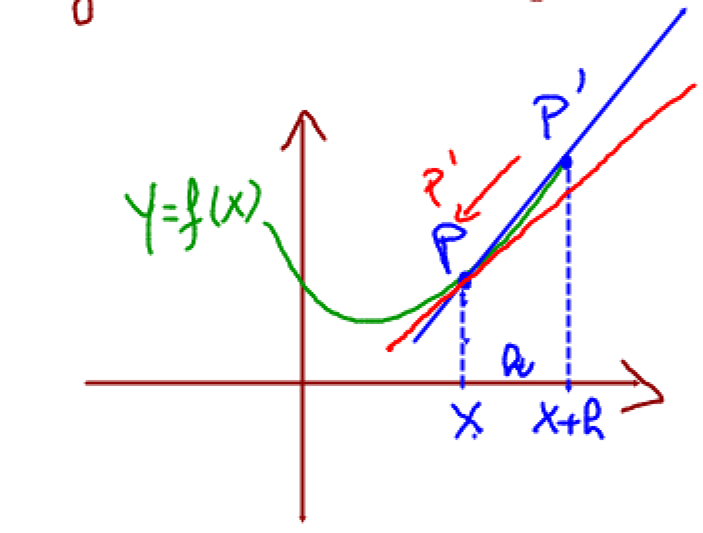
riprendiamo la parabola $y = x^2 - 2x$



il coeff. angolare della tangente alla parabola nel punto B è POSITIVO

il coeff. angolare della tangente alla parabola nel punto A è negativo

La derivata di una funzione, calcolata in un punto, è il coefficiente angolare della tangente alla curva (che rappresenta la funzione) in quel punto



<u>h è un incremento</u>

Se $h \to 0$ $\quad P' \to P$

la retta secante che passa per P e P' diventa retta tangente in P se $h \to 0$

Il coefficiente angolare della retta che passa per P e P' è

$$\frac{y_{P'}-y_P}{x_{P'}-x_P} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente a P è

$$\boxed{y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

← derivata di $y=f(x)$ ← è il limite del rapporto incrementale per l'incremento che tende a 0 $(h \to 0)$

Applichiamo tale formula alla funzione $y=x^2-2x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(x+h)^2-2(x+h)}^{f(x+h)}-\overbrace{(x^2-2x)}^{f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh\cancel{-2x}-2h\cancel{-x^2}\cancel{+2x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2+2xh-2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+2x-2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0}(h+2x-2) = 2x-2$$

$y'=2x-2$ è la derivata di $y=x^2-2x$

ALTRO ESEMPIO

$y=-x^2+4$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{-x-h^2-2xh+4-(-x^2+4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{-x^2}-h^2-2xh\cancel{+4}\cancel{+x^2}\cancel{-4}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(-h-2x)}{\cancel{h}} = -2x$$

In generale: $\quad y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

$y=kx^n \Rightarrow y'=nkx^{n-1}$