1) Risolvi le seguenti equazioni e scrivi le soluzioni reali in ordine crescente, indicando se sono multiple e quante sono le eventuali soluzioni non reali:

$x^2(1-x)=(1-x)^3$ questa equazione equivale a $x^2(1-x)-(1-x)^3=0$ quindi non è scomposta in fattori e vanno sviluppate le operazioni (cubo del binomio e moltiplicazione di un monomio per un binomio) ottenendo: $x^2-x^3=1-x^3-3x+3x^2$ da cui:

$$2x^2-3x+1=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-2x-x+1=0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x-1)-(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(2x-1)=0$$

quindi, applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene l'insieme delle soluzioni: $S=\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

$(2x-1)^3(x+3)^2=0$ per risolvere questa equazione si applica subito la legge di annullamento del prodotto dato che è già scomposta in fattori ottenendo l'insieme di soluzioni $S=\left\{-3(doppia);\frac{1}{2}(tripla)\right\}$

$\frac{x^2}{2-2x}+\frac{x^2}{x^2-3x+2}=0$ per risolvere questa equazione si scompongono i denominatori, al fine di determinare le condizioni di esistenza e il minimo denominatore comune : $x^2-3x+2=0$ si scompone facilmente in $(x-1)(x-2)$ e $2-2x$ in $2(1-x)$ oppure $-2(x-1)$

quindi:

$$-\frac{x^2}{2(x-1)}+\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}=0 \quad \text{con} \quad C.E.: x\neq 1 \wedge x\neq 2$$

da cui:

$$\frac{-x^2(x-2)+2x^2}{2(x-1)(x-2)}=0$$

da cui, applicando il secondo principio di equivalenza delle equazioni, si ottiene:

$$-x^2(x-2)+2x^2=0 \quad \Rightarrow \quad -x^3+2x^2+2x^2=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2-x^3=0 \quad \Rightarrow \quad x^2(4-x)=0$$

quindi, applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene l'insieme delle soluzioni: $S=\{0(doppia);4\}$

2) Risolvi il seguente sistema di disequazioni e scrivi le soluzioni nelle due forme diverse che conosci:

$$\begin{cases} \dfrac{1-3x}{1+4x+4x^2}\geq 0 \\ 3x+2x^2\leq 5x^3 \end{cases}$$

Per risolvere la prima disequazione, si scompone il denominatore: $1+4x+4x^2=(2x+1)^2$

quindi lo schema del prodotto dei segni dei fattori risulta:

		-1/2		1/3	
$1-3x$	+		+	∘	-
$4x^2+4x+1$	+	×	+		+
Segno del quoziente	+		+		-

Da cui si deduce che la disequazione $\dfrac{1-3x}{4x^2+4x+1} \geq 0$ ha soluzioni:

$$x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{3} \qquad \text{cioè:} \qquad S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$$

Per risolvere la seconda disequazione si applica il primo principio di equivalenza delle disequazioni, ottenendo:

$$-5x^3 + 2x^2 + 3x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -x(5x^2 - 2x - 3) \leq 0$$

Il fattore $5x^2 - 2x - 3$ si può scomporre così: $5x^2 - 5x + 3x - 3 = 5x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(5x+3)$

Quindi lo schema del prodotto dei segni dei fattori risulta:

		-3/5		0		1	
$-x$	+		+	∘	-		-
$5x^2-2x-3$	+	∘	-		-	∘	+
Segno del prodotto	+		-		+		-

da cui si deduce che la disequazione $-5x^3 + 2x^2 + 3x \leq 0$ ha soluzioni:

$$-\frac{3}{5} \leq x \leq 0 \vee x \geq 1 \qquad \text{cioè:} \qquad S = \left[-\frac{3}{5}; 0\right] \cup [1; +\infty[$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche raccogliendo x invece di –x, cioè:

$$-5x^3 + 2x^2 + 3x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x(-5x^2 + 2x + 3) \leq 0$$

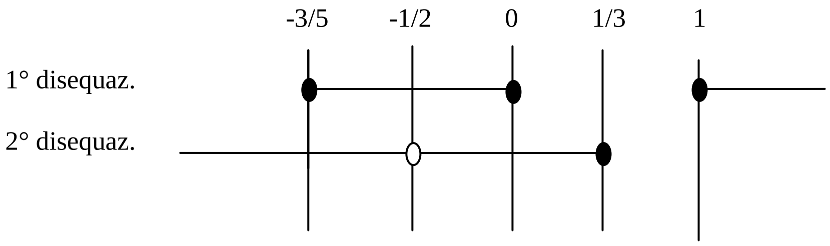
		-3/5		0		1	
x	-		-	∘	+		+
$-5x^2+2x+3$	-	∘	+		+	∘	-
Segno del prodotto	+		-		+		-

o anche studiando il segno dei tre fattori di primo grado

I risultati delle due disequazioni vanno messi a sistema per determinare le soluzioni comuni, quindi:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{5} \leq x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x < -\dfrac{1}{2} \vee -\dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

da cui:



Osservando lo schema delle soluzioni si deduce che la soluzione del sistema è:

$$-\frac{3}{5} \le x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{2} < x \le 0 \qquad \text{cioè:} \qquad S = \left[-\frac{3}{5};-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};0\right]$$

3) Rappresenta, su un piano cartesiano monometrico in cui l'unità di misura corrisponde a due quadretti, il seguente sistema di disequazioni (cancella le zone che sono escluse e alla fine evidenzia la zona che rappresenta l'insieme delle soluzioni) Determina poi le coordinate dei vertici della regione che hai individuato:

$$\begin{cases} 3y - 6 \le 0 \\ 2(x+3) \ge 6 \\ 3x - 2y \le 4 \end{cases}$$

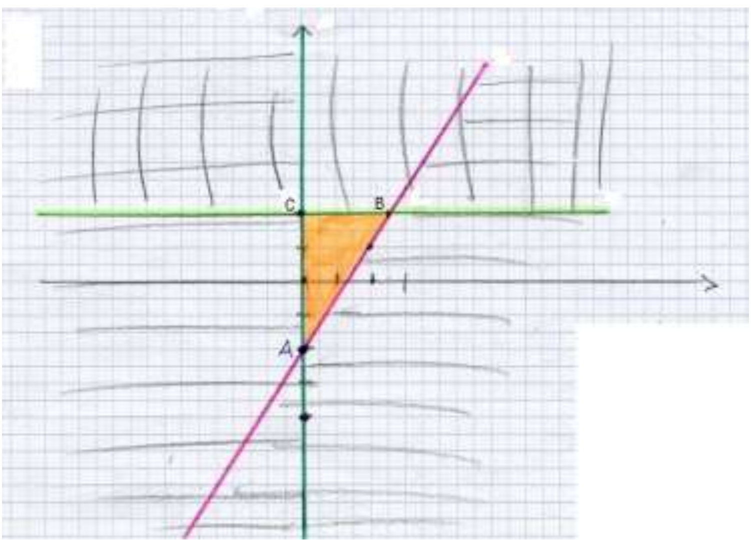
La prima disequazione $3y - 6 \le 0 \quad \Rightarrow \quad 3y \le 6 \quad \Rightarrow \quad y \le 2 \Rightarrow$ ha per soluzioni tutti i punti della retta $y = 2$ (parallela all'asse x) e quelli del semipiano sotto la retta stessa.
Quindi si cancella la zona sopra alla retta di equazione $y = 2$.

La seconda disequazione $2(x+3) \ge 6 \quad \Rightarrow \quad 2x + 6 \ge 6 \quad \Rightarrow \quad 2x \ge 0 \Rightarrow \quad x \ge 0$ ha per soluzioni tutti i punti dell'asse y e quelli del semipiano a destra dell'asse stesso.
Quindi si cancella la zona a sinistra dell'asse delle ordinate (2° e 3° quadrante)

La terza disequazione $3x - 2y \le 4 \quad \Rightarrow \quad -2y \le -3x + 4 \quad \Rightarrow \quad 2y \ge 3x - 4$ (Attenzione al secondo principio di equivalenza delle disequazioni, quando si moltiplicano i due membri per un numero negativo)

$\Rightarrow \quad y \ge \frac{3}{2}x - 2$ ha per soluzioni tutti i punti della retta $y = \frac{3}{2}x - 2$ e quelli del semipiano giacenti sopra alla retta stessa. Quindi si cancella la zona sotto la retta.

Si ottiene quindi la figura



Per determinare le coordinate dei vertici A, B e C di tale figura si risolvono i sistemi formati dalle equazioni delle rette che li determinano, quindi:

$$A\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow A\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow A(0;-2) \qquad C\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow C(0;2)$$

$$B\begin{cases} y=2 \\ y=\frac{3}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow B\begin{cases} \frac{3}{2}x-2=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\begin{cases} \frac{3}{2}x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3};2\right)$$

4)Determina le coordinate del vertice e delle intersezioni con i due assi cartesiani della parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ disegnala sul piano cartesiano, utilizzando un piano cartesiano monometrico, nel quale l'unità corrisponde a 2 quadretti.
Sullo stesso piano cartesiano disegna poi la retta di equazione $x-2y-4=0$ e determina, tramite l'opportuno sistema, i punti di intersezione tra la parabola e la retta.

L'asse di simmetria di una parabola ha equazione $x=-\frac{b}{2a}$ quindi $x=-\frac{2}{-1} \Rightarrow x=2$ è l'asse di simmetria della parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$

Il vertice si trova quindi risolvendo il sistema $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x \end{cases} \Rightarrow V\begin{cases} x=2 \\ y=-2+4=2 \end{cases} \Rightarrow V(2;2)$

L'intersezione con l'asse delle ordinate è $O(0;0)$

Le intersezioni con l'asse delle ascisse si trovano risolvendo il il sistema $\begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{1}{2}x^2+2x \end{cases} \Rightarrow$

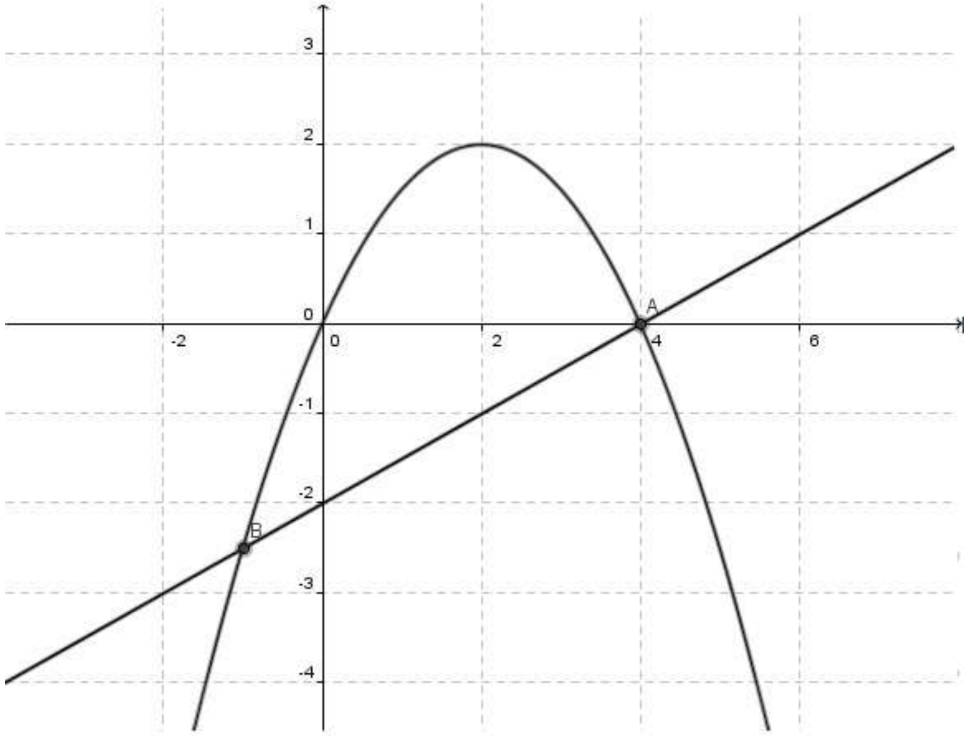
$$\begin{cases} y=0 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ -\frac{1}{2}x(x-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \vee x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases}$$

quindi le intersezioni con l'asse delle ascisse sono i due punti $0(0;0)$ $A(4;0)$

Conoscendo le coordinate del vertice e delle intersezioni con gli assi cartesiani risulta facile tracciare il grafico della parabola, tuttavia è possibile anche determinare qualche altro punto, sostituendo valori di x a piacere nell'equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ cioè utilizzando il concetto di funzione.
E' necessario rispettare l'unità di misura indicata nella traccia (unità corrispondente a due quadretti)

Sullo stesso piano cartesiano va poi disegnata la retta di equazione $x-2y-4=0$ che conviene esplicitare:
$y=\frac{1}{2}x-2$ Tale retta passa per i punti (0;-2) e (4;0) in cui interseca gli assi cartesiani.
Per disegnarla è anche possibile, invece di determinare l'intersezione con l'asse x, tener conto del coefficiente angolare m (scalino: andando a destra di due quadretti, si sale di uno) a partire da (0; q) cioè (0;-2)

Il grafico è il seguente:



Infine, per determinare i punti di intersezione tra parabola e retta, si risolve il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ (x-4)(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ x = -1 \vee x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 = 2 - 2 = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Quindi i due punti di intersezione sono: $A(4;0)$ $B\left(-1;-\frac{5}{2}\right)$