1. LE DISEQUAZIONI E LE LORO PROPRIETÀ

DEFINIZIONE

Disequazione

Una disequazione è una disuguaglianza in cui compaiono espressioni letterali per le quali cerchiamo i valori di una o più lettere che rendono la disuguaglianza vera.

Le disuguaglianze sono enunciati fra espressioni che confrontiamo mediante le seguenti relazioni d'ordine:
$<$ (minore),
$>$ (maggiore),
$\leq$ (minore o uguale),
$\geq$ (maggiore o uguale).
Per esempio:
$2 + 1 < 5$,
$3a + 1 \geq b$.

Le lettere per le quali si cercano valori sono le **incognite**. I valori delle incognite che rendono vera la disuguaglianza sono le **soluzioni** della disequazione.

Ci occuperemo, per il momento, di disequazioni a una sola incognita e cercheremo di determinare l'**insieme delle soluzioni** nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

ESEMPIO

La disequazione

$$5 - x > 0$$

ha come insieme delle soluzioni $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$, che indichiamo, per brevità, con $x < 5$.

Una disequazione è **numerica** se nell'equazione non compaiono altre lettere oltre all'incognita. È **letterale** se invece contiene altre lettere, che possono anche essere chiamate *parametri*.

Se una disequazione è scritta nella **forma normale**

$$P(x) > 0,$$

con $P(x)$ polinomio nell'incognita x ridotto in forma normale, il **grado della disequazione** è il grado di $P(x)$. Analoga definizione si ha con $<, \leq, \geq$.

Una disequazione è **intera** se l'incognita compare soltanto nei numeratori delle eventuali frazioni presenti nella disequazione. Se invece l'incognita è contenuta nel denominatore di qualche frazione, allora la disequazione è **fratta**.

ESEMPIO

La disequazione

$$\frac{2}{x+5} > 3x - 1$$

è fratta e ha senso solo quando $x + 5 \neq 0$, cioè per ogni $x \neq -5$.
Diciamo anche che la sua condizione di esistenza è $x \neq 5$.

Non esistono frazioni con denominatore nullo.

DEFINIZIONE

Condizioni di esistenza

Le condizioni di esistenza di una disequazione sono quelle condizioni che le variabili devono soddisfare affinché tutte le espressioni scritte abbiano significato.

Per brevità, indicheremo le condizioni di esistenza con C.E.

Gli intervalli

Spesso gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni che studieremo saranno particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiamati **intervalli**.

Gli insiemi delle soluzioni potranno anche essere unioni di intervalli.

DEFINIZIONE

Intervallo limitato

Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiama intervallo limitato l'insieme dei numeri reali x compresi fra a e b.

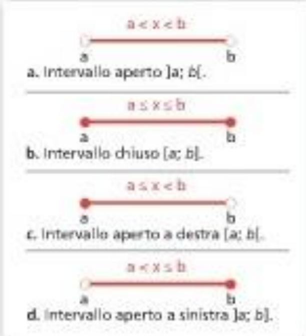
DEFINIZIONE

Intervallo illimitato

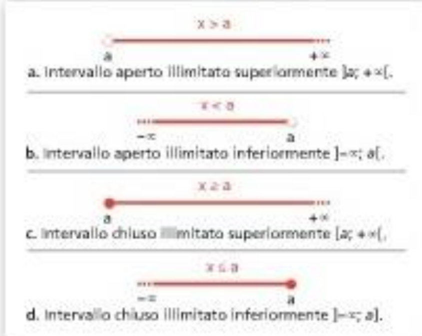
Dato un numero reale a, si chiama intervallo illimitato l'insieme dei numeri reali x che precedono a, oppure l'insieme dei numeri reali x che seguono a.

Distinguiamo i seguenti casi, dove rappresentiamo gli intervalli in tre modi diversi: con una disuguaglianza, mediante parentesi quadre o con una rappresentazione grafica.

Intervalli limitati



Intervalli illimitati



ESEMPIO

1. $\left[2; \frac{17}{5}\right]$, ossia $2 \leq x \leq \frac{17}{5}$, è un intervallo limitato chiuso; 2 è l'estremo inferiore, $\frac{17}{5}$ l'estremo superiore.

2. $]-\infty; 5[$, ossia $x < 5$, è un intervallo aperto illimitato inferiormente.

Un intervallo si dice **chiuso** quando include i propri estremi, in caso contrario si dice **aperto**.

Le disequazioni equivalenti

DEFINIZIONE

Disequazioni equivalenti

Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO

$x - 3 > 0$ e $x - 2 > 1$ sono disequazioni equivalenti perché hanno per soluzioni i valori dell'intervallo $x > 3$.

Valgono i seguenti principi.

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

I **membri** di una disequazione sono le due espressioni che si trovano a sinistra (primo membro) e a destra (secondo membro) del segno di disuguaglianza.

ESEMPIO

La disequazione $x^2 - 3 < x$ è equivalente alla disequazione $x^2 - x - 3 < 0$, ottenuta sommando $-x$ a entrambi i membri.

Nell'esempio precedente, dopo l'applicazione del primo principio, il termine x sparisce dal secondo membro e compare al primo con il segno cambiato.
In questo senso possiamo dire che **un termine può essere trasportato da un membro all'altro della disequazione cambiandogli il segno**.

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente:
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero (o espressione) *positivo*.
- moltiplicando o dividendo entrambi i membri per un numero (o espressione) *negativo* e *cambiando il verso* della disuguaglianza.

Questa operazione equivale a moltiplicare per -1 i membri della disequazione e a invertire il verso.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il verso della disuguaglianza, si ottiene una disequazione equivalente**.

ESEMPIO

1. La disequazione $\frac{5x}{2} > 1$ è equivalente alla disequazione $5x > 2$. La seconda si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per 2.
2. $-x^2 > -9$ è equivalente a $x^2 < 9$. La seconda disequazione si ottiene dalla prima moltiplicando entrambi i membri per -1 (ovvero cambiando il segno di tutti i termini) e invertendo il verso della disuguaglianza.

2. LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Le disequazioni intere di primo grado possono sempre essere scritte in una delle seguenti forme, dopo aver opportunamente applicato i principi di equivalenza:

$$ax > b, \quad ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo $ax > b$, otteniamo, a seconda dei valori di a:

- se $a > 0$, $\quad x > \frac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b > 0, S = \varnothing; \\ \text{se } b = 0, S = \varnothing; \\ \text{se } b < 0, S = \mathbb{R}; \end{cases}$
- se $a < 0$, $\quad x < \frac{b}{a}$.

Con S indichiamo l'insieme delle soluzioni.

Un ragionamento analogo vale anche per le altre tre disequazioni.
Un esempio di disequazione numerica intera è

$$2 + \frac{x}{4} \leq 1 + x,$$

che, risolta, ha come soluzione $x \geq \frac{4}{3}$, mentre un esempio di disequazione letterale è $ax - 1 \geq 2a$. Per risolvere una disequazione di questo tipo occorre discutere le sue soluzioni al variare di a.

Discutere le soluzioni di una disequazione letterale permette di ottenere le soluzioni di infinite disequazioni numeriche, quelle che si hanno sostituendo nell'equazione data valori particolari alla lettera (o alle lettere).

Negli esercizi vedremo esempi di discussione di disequazioni letterali.

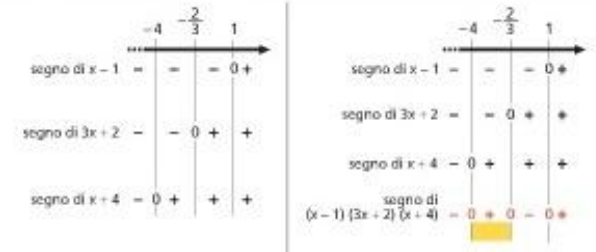
Lo studio del segno di un prodotto

Consideriamo una disequazione costituita da un prodotto di binomi di primo grado:

$$(x - 1)(3x + 2)(x + 4) > 0.$$

Per risolverla possiamo **studiare il segno** del prodotto al variare di x.
Studiamo il segno dei singoli fattori e rappresentiamo i risultati in uno schema grafico (figura 1):

$$x - 1 > 0 \quad \to \quad x > 1$$
$$3x + 2 > 0 \quad \to \quad x > -\frac{2}{3}$$
$$x + 4 > 0 \quad \to \quad x > -4.$$



◄ Figura 1

a. Disegniamo una retta orientata e segniamo su di essa i valori per cui i fattori si annullano. Sotto alla retta, usando una riga per ogni fattore, scriviamo 0 nei punti in cui i fattori si annullano, dei segni + dove sono positivi, dei segni – dove sono negativi.

b. Aggiungiamo una riga per il prodotto. I punti in cui si annulla sono quelli in cui uno dei fattori è nullo. Il segno si ricava applicando «in verticale» la regola dei segni. Per finire, evidenziamo in giallo gli intervalli in cui la disequazione è verificata.

La disequazione richiede che il prodotto sia positivo, quindi l'insieme delle soluzioni è:

$$-4 < x < -\frac{2}{3} \quad \vee \quad x > 1.$$