1) Determina i punti di intersezione tra la parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ e la retta di equazione $x - 4y + 2 = 0$ e verifica i tuoi risultati rappresentando le due funzioni su un piano cartesiano monometrico in cui l'unità di misura corrisponde a quattro quadretti (/30 punti)

Per determinare i punti di intersezione tra parabola e retta risolvo il sistema dato dalle due equazioni

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ \text{idem} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2 \lor x = 1$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi i due punti di intersezione sono $(-2;0)$ $(1;\frac{3}{4})$

Per rappresentare la parabola sul piano cartesiano indicato nel testo, determino l'asse di simmetria, il vertice e le intersezioni con gli assi:

Asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = 0$

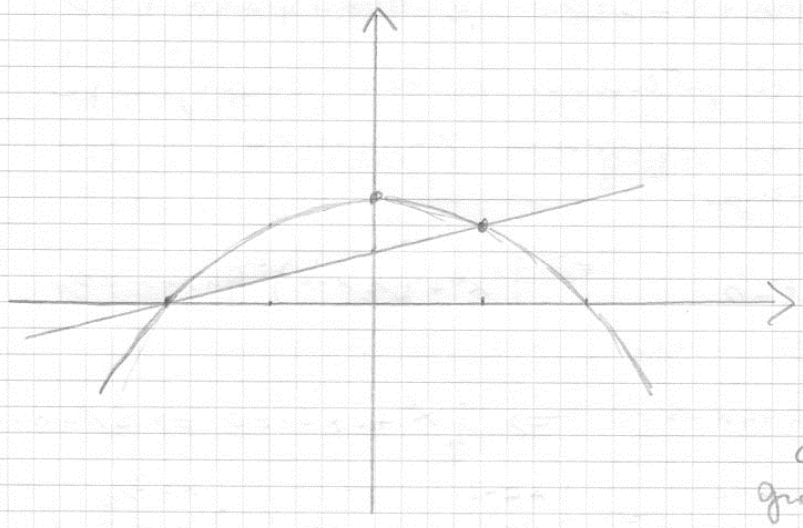
$V \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{4} \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$ $V(0;1)$ che corrisponde con l'intersezione con l'asse y

int. asse x $\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

quindi $(-2;0)$ $(2;0)$

Per rappresentare la retta $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ determino le intersezioni con gli assi $(0;\frac{1}{2})$ $(-2;0)$

oppure i valori $f(0) = \frac{1}{2}$ $f(4) = \frac{3}{2}$



Dopo aver disegnato la parabola e la retta si può verificare che i relativi grafici hanno intersezioni nei punti $(-2;0)$ $(1;\frac{3}{4})$ trovati in modo analitico

2) Un'impresa, per la produzione di un articolo, sostiene spese fisse mensili di 40 euro un costo variabile di 1,50 euro per ogni unità prodotta. Sapendo che l'impresa opera in regime di monopolio e che la domanda degli articoli prodotti è data dalla funzione $x = 60 - 4p$ (dove p è espresso in euro) quanti articoli si devono produrre e vendere in un mese per ottenere il massimo guadagno? (/10 punti)

x = articoli da produrre in un mese

$C(x)$: $y = 40 + 1,5x$

dalla funzione di domanda $x = 60 - 4p$ si ricava:

$4p = 60 - x \Rightarrow p = 15 - \frac{1}{4}x$

quindi $R(x)$: $y = (15 - \frac{1}{4}x)x \Rightarrow y = 15x - 0,25x^2$

dunque $U(x)$: $y = 15x - 0,25x^2 - 40 - 1,5x$

$y = -0,25x^2 + 13,5x - 40$

Dato che l'utile è una funzione che si rappresenta con una parabola rivolta verso il basso, il massimo utile si avrà in corrispondenza del vertice

quindi $x_V = \frac{-13,5}{-0,5} = 27$ $\quad U(27) = 142,25$

Per ottenere il massimo utile, di 142,25 euro, si devono produrre e vendere 27 articoli al mese

3) Determina l'equazione della circonferenza con centro nel punto (-2;0) e raggio 3. Determina poi, in modo analitico (cioè risolvendo l'opportuno sistema) le intersezioni di tale circonferenza con la retta di equazione $x - 2y - 4 = 0$ (/20 punti)

Per determinare l'equazione della circonferenza con centro nel punto (-2;0) e raggio 3 si deve imporre che la distanza del punto generico P(x;y) della circonferenza dal suo centro sia 3, quindi:

$\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 3 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 9$

quindi $x^2 + 4 + 4x + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

Per determinare le intersezioni di tale circonferenza con la retta di equazione $x - 2y - 4 = 0$ risolvo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{idem} \\ x^2 + (\frac{1}{2}x - 2)^2 + 4x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{idem} \\ x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 + 4x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} = \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2}(-2) - 2 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2/5 \\ y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - 2 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

Quindi i punti di intersezione sono $(-2;-3)$ $(2/5; -\frac{9}{5})$

4) L'equazione della circonferenza dell'esercizio precedente è una funzione? Perché? Potresti ottenerla utilizzando delle funzioni? Se sì, in che modo? (/10 punti)

L'equazione della circonferenza $x^2+y^2+4x-5=0$ non è una funzione, perché ad un valore di x vengono associati due valori di y. Tuttavia la circonferenza si può ottenere unendo i due grafici delle funzioni ottenute esplicitando y cioè: $y^2=-x^2-4x+5$

quindi $y=\sqrt{-x^2-4x+5}$ e $y=-\sqrt{-x^2-4x+5}$

Disegnando queste due funzioni con Derive o Geogebra si ottiene la circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x-5=0$

5) Trova le intersezioni tra la retta di equazione $3x-2y-9=0$ e la curva di equazione $y=\dfrac{-3}{x}$ (/15 punti)

$$\begin{cases} y=-3/x \\ y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3/x \\ \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=-\frac{3}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2-9x}{2x}=\frac{-6}{2x} \quad x\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-9x+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-3}{1}=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi i punti di intersezione sono $(1;-3)$ $(2;-\frac{3}{2})$

6) Determina i valori assunti dalla funzione $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ nei punti di ascissa x=0, x=3, x= -2

Che andamento ha il grafico della funzione $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$? (/5 punti)

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

$f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ $\qquad f(-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

Il grafico della funzione $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ha andamento decrescente perché $\frac{1}{2}<1$

infatti attribuendo valori più grandi di x si ottengono valori più piccoli di y:

x	0	1	2	3	...
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...