

- 1) Determina l'equazione della circonferenza con centro nel punto  $(-3;0)$  e raggio 2. Determina poi, in modo analitico (cioè risolvendo l'opportuno sistema) le intersezioni di tale circonferenza con la retta di equazione  $2x+3y=0$  ( /20 punti)

L'equazione della circonferenza con centro nel punto  $(-3;0)$  e raggio 2 si ottiene imponendo che la distanza tra il punto generico  $P(x,y)$  e il centro  $(-3;0)$  sia 2

quindi  $\sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2}=2$  cioè  $(x+3)^2+y^2=4$

quindi  $x^2+3+6x+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2+6x+5=0$

Per determinare le intersezioni tra questa circonferenza e la retta di equazione  $2x+3y=0$  risolvo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ x^2+y^2+6x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ x^2+\frac{4}{9}x^2+6x+5=0 \Rightarrow \frac{13}{9}x^2+6x+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ 13x^2+54x+45=0 \end{cases} \quad x_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{576}}{26} = \begin{cases} -\frac{15}{13} \\ -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{2}{3}(-3) = 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{15}{13} \\ y = \frac{2}{3}(-\frac{15}{13}) = -\frac{10}{13} \end{cases}$$

quindi i due punti di intersezione sono  $(-3;2)$  e  $(-\frac{15}{13}; -\frac{10}{13})$

- 2) L'equazione della circonferenza dell'esercizio precedente è una funzione? Perché? Potresti ottenerla utilizzando delle funzioni? Se sì, in che modo? ( /10 punti)

L'equazione della circonferenza  $x^2+y^2+6x+5=0$  non è una funzione, perché ad un valore di  $x$  vengono associate due valori di  $y$ . Tuttavia la circonferenza si può ottenere unendo i due grafici delle funzioni ottenute esplicitando  $y$  cioè:  $y^2 = -x^2-6x-5$

quindi  $y = \sqrt{-x^2-6x-5}$  e  $y = -\sqrt{-x^2-6x-5}$

Risegnando queste due funzioni con Desmos o GeoGebra si ottiene la circonferenza di equazione  $x^2+y^2+6x+5=0$

3) Determina i punti di intersezione tra la retta di equazione  $3x + 2y - 3 = 0$  e la parabola  $y = -3x^2 + 4x$  e verifica i tuoi risultati rappresentando le due funzioni su un piano cartesiano monometrico in cui l'unità di misura corrisponde a tre quadretti ( /30 punti)

$$3x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

Per determinare i punti di intersezione tra parabola e retta risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = -3x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\text{ponendo } \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = -3x^2 + 4x \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 11x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{12} = \frac{11 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-9+6}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \end{cases}$$

Quindi i punti di intersezione sono:  $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4})$  e  $(\frac{1}{3}; 1)$

Per rappresentare la parabola nel piano cartesiano stabilito dal testo, determino l'asse di simmetria, il vertice e le intersezioni con gli assi della funzione  $y = -3x^2 + 4x$

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{l'asse di simmetria } \hat{=} x = \frac{2}{3}$$

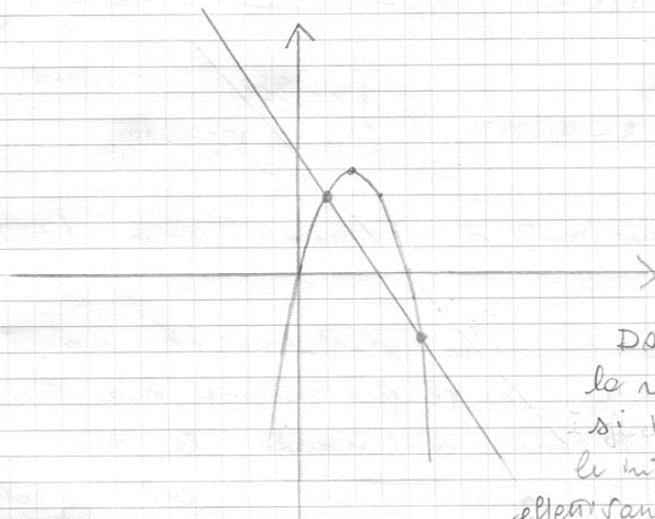
$$\vee \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -3(\frac{2}{3})^2 + 4(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \vee (\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$$

$$\text{int. asse } y \ (0;0) \quad \text{int. asse } x \ \begin{cases} y = 0 \\ -3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -x(3x-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0;0) & (\frac{4}{3};0) \end{matrix}$$

Per rappresentare la retta sullo stesso piano cartesiano determino le intersezioni con gli assi della funzione  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

quindi  $(0; \frac{3}{2})$   $(1; 0)$



Dopo aver disegnato la retta e la parabola si verifica che le intersezioni sono effettivamente nei punti  $(\frac{1}{3}; 1)$  e  $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4})$

4) Un'impresa sostiene le seguenti spese per la produzione di un articolo:

- spesa fissa mensile di 200 euro
- costo variabile di 1,50 euro per ogni unità prodotta
- spesa pari al 8% del quadrato delle unità prodotte.

Sapendo che l'impresa vende gli articoli a 65,50 euro l'uno, quanti articoli si devono produrre e vendere in un mese per ottenere il massimo guadagno? ( /10 punti)

$X =$  articoli da produrre e vendere in un mese

$C(x) : y = 200 + 1,5x + 0,08x^2$

$R(x) : y = 65,5x$

$U(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow U(x) : y = 65,5x - 200 - 1,5x - 0,08x^2$

quindi  $y = -0,08x^2 + 64x - 200$

Dato che la funzione utile si rappresenta con una parabola rivolta verso il basso, il massimo utile corrisponde al vertice della parabola, quindi  $x_v = \frac{-64}{-0,16} = 400$

$x = 400$   
 $y = -0,08 \cdot 400^2 + 64 \cdot 400 - 200 = 12.600$

quindi il massimo utile, di 12.600 euro, si ottiene producendo e vendendo 400 articoli al mese

5) Trova le intersezioni la retta di equazione  $3x - y + 7 = 0$  e la curva di equazione  $y = \frac{-2}{x}$  ( /15 punti)

$\begin{cases} y = 3x + 7 \\ y = \frac{-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 7 \\ 3x + 7 = \frac{-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2 + 7x + 2}{x} = 0 \text{ con } x \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 3(-\frac{1}{3}) + 7 = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 3(-2) + 7 = 1 \end{cases}$

quindi i due punti di intersezione sono  $(-\frac{1}{3}; 6)$   $(-2; 1)$

6) Determina i valori assunti dalla funzione  $y = 2^x$  nei punti di ascissa  $x=0$ ,  $x=3$ ,  $x=-2$   
 Come puoi definire la funzione  $y = 2^x$ ? ( /5 punti)

$y = 2^x$   $f(0) = 2^0 = 1$   $f(3) = 2^3 = 8$   $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$y = 2^x$  è una funzione esponenziale