1) Determina i punti di intersezione tra la parabola $y=-3x^2+4x$ e la retta di equazione $3x+2y-3=0$ e verifica i tuoi risultati rappresentando le due funzioni su un piano cartesiano monometrico in cui l'unità di misura corrisponde a tre quadretti (/30 punti)

$3x+2y-3=0 \Rightarrow 2y=-3x+3 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

Per determinare i punti di intersezione tra parabola e retta risolvo il sistema: $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-3x^2+4x \end{cases}$

quindi $\begin{cases} -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=-3x^2+4x \\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-4x-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=0 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-\frac{11}{2}x+\frac{3}{2}=0 \\ \text{idem} \end{cases} \Rightarrow 6x^2-11x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{12}=\frac{11\pm7}{12}= \begin{cases} \frac{18}{12}=\frac{3}{2} \\ \frac{4}{12}=\frac{1}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{-9+6}{4}=\frac{-3}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1 \end{cases}$

Quindi i punti di intersezione sono: $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$ e $\left(\frac{1}{3};1\right)$

Per rappresentare la parabola nel piano cartesiano stabilito dal testo, determino l'asse di simmetria, il vertice e le intersezioni con gli assi della funzione $y=-3x^2+4x$

$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3} \Rightarrow$ l'asse di simmetria è $x=\frac{2}{3}$

$V\begin{cases} x=2/3 \\ y=-3\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow V\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

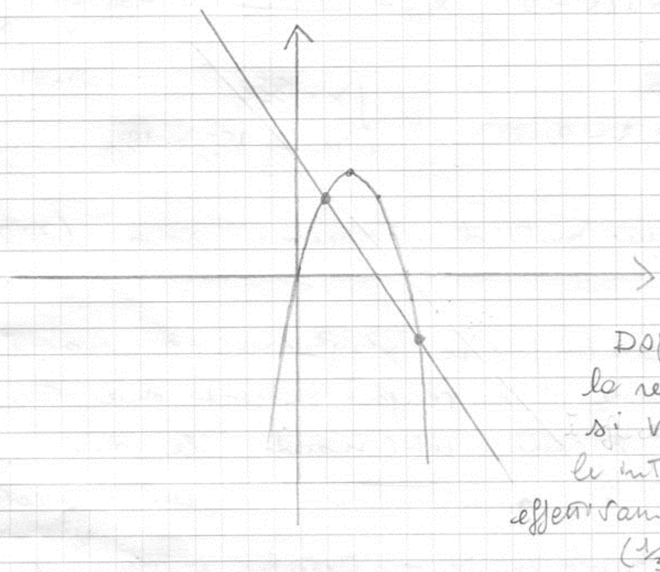
int. asse y $(0;0)$ int. asse x $\begin{cases} y=0 \\ -3x^2+4x=0 \end{cases} \Rightarrow -x(3x-4)=0$

$(0;0)$ $\left(\frac{4}{3};0\right)$

Per rappresentare la retta sullo stesso piano cartesiano determino le intersezioni con gli assi della funzione $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=3/2 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2}(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

quindi $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ $(1;0)$



Dopo aver disegnato la retta e la parabola si verifica che le intersezioni sono effettivamente nei punti $\left(\frac{1}{3};1\right)$ e $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$

2) Un'impresa sostiene le seguenti spese per la produzione di un articolo:

a. spesa fissa mensile di 200 euro
b. costo variabile di 1,50 euro per ogni unità prodotta
c. spesa pari al 8% del quadrato delle unità prodotte.

Sapendo che l'impresa vende gli articoli a 65,50 euro l'uno, quanti articoli si devono produrre e vendere in un mese per ottenere il massimo guadagno? (/10 punti)

X = articoli da produrre e vendere in un mese

$C(x): \ y = 200 + 1{,}5x + 0{,}08x^2$

$R(x): \ y = 65{,}5x$

$U(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow U(x): \ y = 65{,}5x - 200 - 1{,}5x - 0{,}08x^2$

quindi $y = -0{,}08x^2 + 64x - 200$

Dato che la funzione utile si rappresenta con una parabola rivolta verso il basso, il massimo utile corrisponde al vertice della parabola, quindi $x_V = \frac{-64}{-0{,}16} = 400$

$$\begin{cases} x = 400 \\ y = -0{,}08 \cdot 400^2 + 64 \cdot 400 - 200 = 12600 \end{cases}$$

Quindi il massimo utile, di 12600 euro, si ottiene producendo e vendendo 400 articoli al mese

3) Determina l'equazione della circonferenza con centro nel punto (3;0) e raggio 2. Determina poi, in modo analitico (cioè risolvendo l'opportuno sistema) le intersezioni di tale circonferenza con la retta di equazione $2x - 3y = 0$ (/20 punti)

$C(3;0) \quad r = 2$

l'equazione della circonferenza con centro nel punto (3;0) e raggio 2 si ottiene imponendo che la distanza tra il punto generico $P(x;y)$ e il centro (3;0) sia 2

quindi $\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 2$ cioè $(x-3)^2 + y^2 = 4$

quindi $x^2 + 9 - 6x + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

Per determinare le intersezioni tra questa circonferenza e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ risolvo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^2 + \frac{4}{9}x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{13}{9}x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ 13x^2 - 54x + 45 = 0 \end{cases} \qquad x_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{576}}{26} = \frac{54 \pm 24}{26} \begin{cases} \frac{15}{13} \\ 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{2}{3} 3 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{15}{13} \\ y = \frac{2}{3} \frac{15}{13} = \frac{10}{13} \end{cases}$$

Quindi i due punti di intersezione sono $(3;2)$ $\left(\frac{15}{13}; \frac{10}{13}\right)$

4) L’equazione della circonferenza dell’esercizio precedente è una funzione? Perché? Potresti ottenerla utilizzando delle funzioni? Se sì, in che modo? (/10 punti)

L'equazione della circonferenza $x^2+y^2-6x+5=0$ non è una funzione perché ad un valore di x vengono associati due valori di y.
Tuttavia si può ottenere utilizzando le due funzioni
$y=\sqrt{-x^2+6x-5}$ e $y=-\sqrt{-x^2+6x-5}$ che si ricavano da $y^2=-x^2+6x-5$
(Disegnando le due curve con Derive o Geogebra si ottiene la circonferenza)

5) Trova le intersezioni la retta di equazione $3x-y+7=0$ e la curva di equazione $y=\frac{-2}{x}$

(/15 punti)

$$\begin{cases} y=3x+7 \\ y=\frac{-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x+7 \\ 3x+7=\frac{-2}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2+7x+2}{x}=0 \text{ con } x\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2+7x+2=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{6}=\begin{cases} -\frac{1}{3} \\ -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=3(-\frac{1}{3})+7=6 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=3(-2)+7=1 \end{cases}$$

Quindi i due punti di intersezione sono $(-\frac{1}{3};6)$ $(-2;1)$

6) Determina i valori assunti dalla funzione $y=2^x$ nei punti di ascissa x=0, x=3, x= -2

Come puoi definire la funzione $y=2^x$? (/5 punti)

$y=2^x$ $f(0)=2^0=1$ $f(3)=2^3=8$ $f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}$

$y=2^x$ è una funzione esponenziale