

Capitalizzazione semplice e composta
(sul libro a pag. 386 e seguenti)

Operazione finanziaria = un'operazione in cui avviene uno scambio di denaro in tempi diversi.

Mutuante o creditore = chi concede il prestito

Mutuatario o debitore = chi riceve il prestito

Capitale = somma di denaro che interviene in un'operazione finanziaria

Interesse = I = compenso che il debitore si impegna a versare al creditore in aggiunta al capitale iniziale C alla fine del prestito

Montante = capitale finale = $M = C + I$

Capitalizzazione = procedimento mediante cui al capitale viene aggiunto l'interesse, quindi fornisce la trasformazione del capitale nel tempo

La capitalizzazione può essere in **regime di capitalizzazione semplice**
oppure in **regime di capitalizzazione composta**

CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

$C_0 = 100$ (capitale all'anno 0
cioè oggi = C_0)

$i = 10\% \Rightarrow i = 0,1$
(interesse effettivo annuo)

$C_1 = 110$

$C_2 = 120$

$C_t = C_0 \frac{it}{100} + C_0$ ← interesse
 $\frac{it}{100} = i$

$C_t = C_0 it + C_0 \Rightarrow C_t = C_0(1+it)$

$C_t = C_0(1+it)$

$C_{15} = 100(1+0,1 \cdot 15) =$
 $= 100(1+1,5) = 250$

$C_{15} = C_0 + I$
← 100 ← 150 = $C_0 it$

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

$$C_0 = 100$$

$$i = 10\% = 0,1$$

$$C_1 = 110$$

$$C_2 = 121$$

$$C_1 = \overbrace{C_0}^{\text{capitale}} + \overbrace{C_0 i}^{\text{interesse}} = C_0(1+i)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i)$$

$$C_2 = C_0(1+i)(1+i)$$

$$C_2 = C_0(1+i)^2$$

$$C_2 = 100(1+0,1)^2$$

$$C_2 = 100(1,1)^2 = 121$$

$$C_3 = C_2 + C_2 i = C_2(1+i) \quad \leftarrow C_2 = C_0(1+i)^2$$

$$C_3 = C_0(1+i)^2(1+i) = C_0(1+i)^3$$

$$C_{15} = C_0(1+i)^{15}$$

$$C_{15} = 100(1,1)^{15} = 417,72$$

$$C_t = C_0(1+i)^t$$

$$\text{oppure } C_m = C_0(1+i)^m \quad \leftarrow \begin{array}{l} (1+i)^m \\ \text{FATTORE} \\ \text{DI} \\ \text{CAPITALIZZAZIONE} \\ \text{COMPOSTA} \end{array}$$

$$(1+i)^m \quad \text{FATTORE DI CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA}$$

corrisponde al
MONTANTE di
1 euro impiegato
per m anni al tasso
annuale i

MONTANTE = CAPITALE + INTERESSE

corrisponde al valore del
capitale valutato dopo m anni

$$M = C_m$$

Se C_0 è il capitale al tempo 0 (oggi) e C_t il capitale al tempo t

In capitalizzazione **semplice** si ha $C_t = C_0(1+it)$

In capitalizzazione **composta** si ha $C_t = C_0(1+i)^t$

Esempi

1) Oggi abbiamo un capitale di 1000 euro. Quanto varrà tale capitale fra tre anni se l'interesse applicato è 3% annuale:

a) in capitalizzazione semplice

b) in capitalizzazione composta

Risoluzione: a) $1000(1+3*0,03) = 1090$ b) $1000(1,03)^3 = 1092,73$

2) Qual è il montante di 500 euro disponibili oggi, fra 5 anni e 6 mesi (quindi chiedo qual è il valore di 500 euro fra 5 anni e 6 mesi) al tasso dell' 1,5 % annuale

a) in capitalizzazione semplice

b) in capitalizzazione composta

Risoluzione a) $500(1+5,5*0,015) = 541,25$ b) $M=C_{5,5} = 500(1,015)^{5,5} = 542,67$

3) Tre anni fa ho versato un capitale presso una banca che applica l'interesse composto del 2% annuale. Oggi tale capitale vale 1500 euro. Quanto avevo versato tre anni fa?

Possiamo risolverlo in due modi diversi:

Primo modo: $C_{-3} = 1500(1,02)^{-3} = 1413,48$

Secondo modo: pongo $x = C_{-3}$ $x(1,02)^3 = 1500$ quindi $1,061208x = 1500$ cioè $x = 1413,48$

Altri esempi si trovano a pag.390 e 391 del libro di testo

Esercizi consigliati: pag. 412 n. 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94

(dove per le frazioni di anno si deve tener conto dell'anno commerciale, cioè di 360 giorni

- vedi pag. 390 – quindi, ad esempio, 3 mesi e 20 giorni diventa $\frac{110}{360} = 0,305\bar{5}$)

4) Oggi verso in banca 3000 euro. La banca applica il tasso dello 0,5 % annuale con capitalizzazione semplice. Quale capitale avrò fra 2 anni e 3 mesi? [3033,75 euro]

5) Oggi verso in banca 3000 euro. La banca applica il tasso dello 0,5 % annuale con capitalizzazione composta. Quale capitale avrò fra 2 anni e 3 mesi? [3033,86 euro]

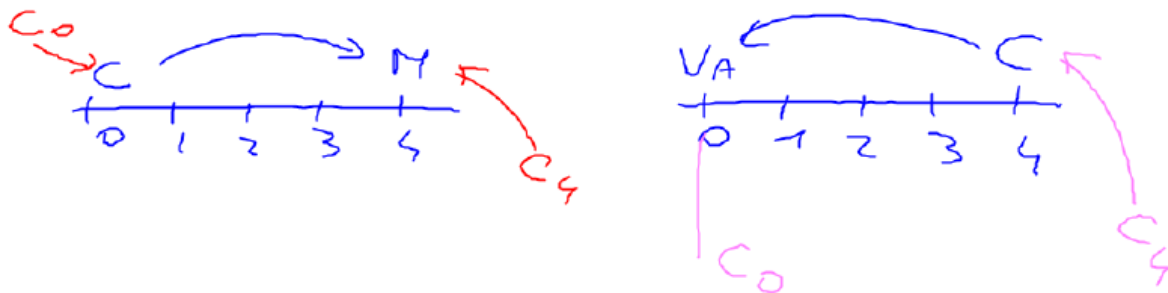
Un capitale assume valori diversi in epoche diverse
 è opportuno disegnare l'asse dei tempi per capire quale valore attribuire all'esponente

nella formula $C_{t_2} = C_{t_1} (1+i)^{t_2-t_1}$

in particolare se ci si sposta avanti di n anni (con tasso annuale) l'esponente è n (positivo)
 se ci si sposta indietro di n anni (con tasso annuale) l'esponente è -n (negativo)

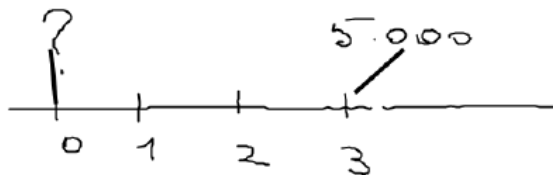
In generale si parla di MONTANTE quando si valuta un capitale nel futuro.

Si parla di VALORE ATTUALE quando si valuta OGGI un capitale che sarà disponibile in futuro.



ESEMPIO

DEVO RESTITUIRE € 5000
 FRA 3 ANNI, SALDO SU PRATO
 IL DEBITO. QUANTO PAGO
 SE IL TASSO APPLICATO È
 $i = 0,03$




$C_3 = 5000$
 $C_0 = ?$

$C_0 (1,03)^3 = 5000$

$C_0 = 5000 (1,03)^{-3}$

$C_0 = \frac{5000}{(1,03)^3} = 4575,71$

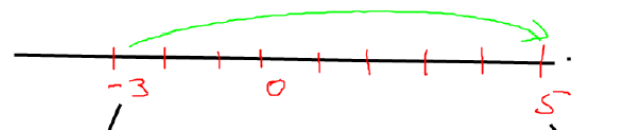
IN PRATICA SI HA:

$$C_t = C_0 (1+i)^t \Rightarrow C_0 = C_t (1+i)^{-t}$$
$$C_{-t} = C_0 (1+i)^{-t}$$


Ogni capitale è valutato al tempo in cui è disponibile (noi usiamo il pedice per indicare questo tempo). Per valutare il capitale in un altro periodo, utilizziamo il fattore di capitalizzazione composta.

ESERCIZIO

Tre anni fa ho depositato € 2.000 al tasso del 2% annuo. Quanto potrà ritirare tra 5 anni?


$$C_5 = C_{-3} (1+i)^8$$
$$= 2000 (1,02)^8 = 2343,32$$

Il problema può essere anche risolto in due tempi.

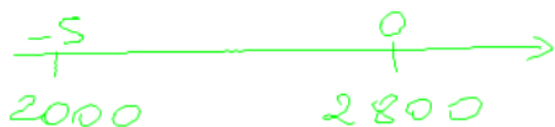
Posso cioè trovare il valore attuale (di oggi - ANNO 0)

$$C_0 = C_{-3} (1+i)^3 = 2122,42$$

$$C_5 = C_0 (1+i)^5 = 2343,32$$

Questo significa che la capitalizzazione COMPOSTA è SCINDIBILE.
La capitalizzazione semplice NON è scindibile.

Esercizio sulla ricerca del tasso:



Samir ha depositato 2000 euro. Oggi posso ritirare 2800 euro. Qual è il tasso applicato?

$$2000(1+i)^5 = 2800$$

$$\boxed{(1+i)^5} = \boxed{(1,4)^{1,5}} \Rightarrow 1+i = (1,4)^{1/5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+i = 1,0696104 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 1,0696104 - 1 \Rightarrow i = 0,0696104 \Rightarrow i = 6,961\%$$

Esercizio sulla ricerca del tempo

Oggi ho 3500 euro in banca. Se viene applicato il tasso del 5%, fra quanto tempo avrò 5000 euro?

Risoluzione

L'equazione risolvente è: $3500(1,05)^x = 5000$ quindi $(1,05)^x = 1,42857142\dots$

$2^x = 8$
 $x = 3$

$x = \log_2 8$ è l'esponente da attribuire alla base per ottenere l'argomento

$$2^x = 8 \quad x = \log_2 8$$

$$x = \log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$$

$$x = \log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = 3$$

quindi

$(1,05)^x = 1,42857142 \Rightarrow$

$$x = \log_{1,05} 1,428571429 = \frac{\log_{10} 1,428571429}{\log_{10} 1,05}$$

$x = 7,31$ 7 anni, 3 mesi, 22 giorni

$0,31 \cdot 12 = 3,72$ / $0,72 \cdot 30 = 21,6$

Esercizi

(In tutti gli esercizi che seguono applichiamo la CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA)

- 6) Tre anni fa ho depositato 2000 euro presso un istituto di credito che applica il tasso del 2,5%. Quanto vale oggi quel capitale?
- 7) Oggi chiedo un prestito di 5000 euro che devo restituire fra 2 anni e sei mesi al tasso del 5%. Qual è la cifra che dovrò restituire fra 2 anni e sei mesi?
- 8) Tempo fa ho investito un capitale in un'operazione che mi renderà 5000 euro fra tre anni. Qual è il valore odierno di quel capitale, se l'operazione è effettuata al tasso del 4% annuale?
- 9) Due anni fa ho versato presso un istituto di credito 3000 euro. Quale capitale avrò a disposizione fra cinque anni se il tasso applicato per tutto il periodo è 1,2% ?
- 10) Mauro tempo fa ha contratto un debito e per saldarlo dovrebbe restituire 3500 euro fra 3 anni e sei mesi. Decide invece di pagarlo oggi. Quanto deve pagare se il tasso applicato è 1,3 % ?
- 11) Laura chiede un prestito di 5000 euro che le viene concesso stabilendo la restituzione di 6000 euro fra due anni. Qual è il tasso applicato all'operazione?
- 12) Mario deve restituire 3000 euro fra due anni. Se salda oggi il debito pagando 2700 euro. Quale tasso è stato applicato?
- 13) Cristina ha prestato 1000 euro a Valentina 2 anni e 9 mesi fa e, secondo quanto hanno stabilito, Valentina restituirà a Cristina 1300 euro fra 6 mesi. Qual è il tasso applicato a tale operazione?
- 14) Matteo ha investito in un'operazione finanziaria 2500 euro sei mesi fa. Fra un anno e tre mesi il valore del capitale investito sarà 2800 euro. Qual è il tasso applicato all'operazione?
- 15) Mario ha diritto a riscuotere 7500 euro fra due anni e tre mesi. Se desidera ricevere oggi il capitale, quanto riscuote, se il tasso applicato è il 5% ?
- 16) Stefano ha diritto a riscuotere 7500 euro fra due anni e tre mesi. Chiede di avere, in cambio di tale credito, 6500 euro fra 6 mesi. Qual è il tasso applicato all'operazione?
- 17) Anna impiega oggi 1500 euro al tasso annuo del 2%. Tra quanto tempo potrà ritirare 2000 euro?
- 18) Luca ha versato in banca due anni e tre mesi fa 6000 euro al tasso del 3% annuale. Oggi versa 3000 euro. Tra quanto tempo potrà ritirare 12000 euro?

Risultati

- | | | | | |
|-----------------|---------------------------------|--------------------------------|-----------------|------------------|
| 6) 2153,78 euro | 7) 5648,63 euro | 8) 4444,98 euro | 9) 3261,26 euro | 10) 3345,30 euro |
| 11) 9,5445 % | 12) 5,4093% | 13) 8,4075% | 14) 6,6902 % | 15) 6720,25 euro |
| 16) 8,5208 % | 17) 14 anni, 6 mesi e 10 giorni | 18) 8 anni, 2 mesi e 18 giorni | | |

Esercizi sul libro di testo: Pag. 413, 414 da 102 a 125