Regola di Ruffini

La regola di Ruffini è utile per scomporre un polinonio, se esso è divisibile per un binomio del tipo (x-a)

Per sapere se un polinomio P(x) è divisibile per (x-a) si applica il teorema del resto, cioè si sostituisce a alla x nel polinomio, che significa calcolare il valore P(a)

Il teorema del resto afferma che P(a) è il resto della divisione di P(x) per (x-a)

Se tale resto è 0 il polinomio è divisibile per (x-a) quindi si può scomporre mediante la regola di Ruffini

ESEMPIO Vogliamo eseguire la divisione:

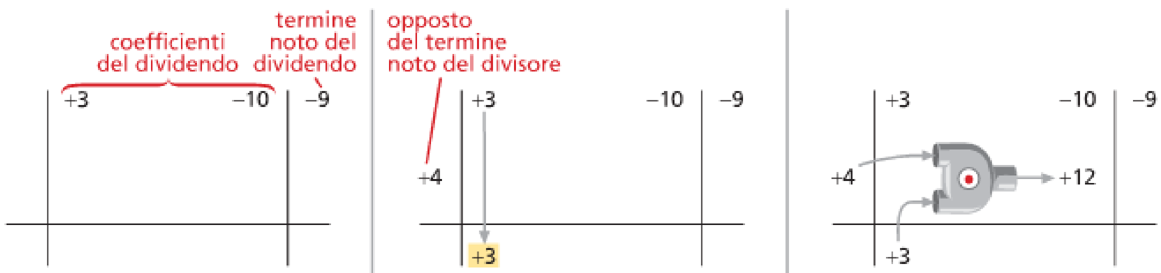
$$(-10x - 9 + 3x^2) : (x - 4),$$

dove il divisore è del tipo $x - a$.

Scriviamo i polinomi ordinati in senso decrescente:

$$(3x^2 - 10x - 9) : (x - 4).$$

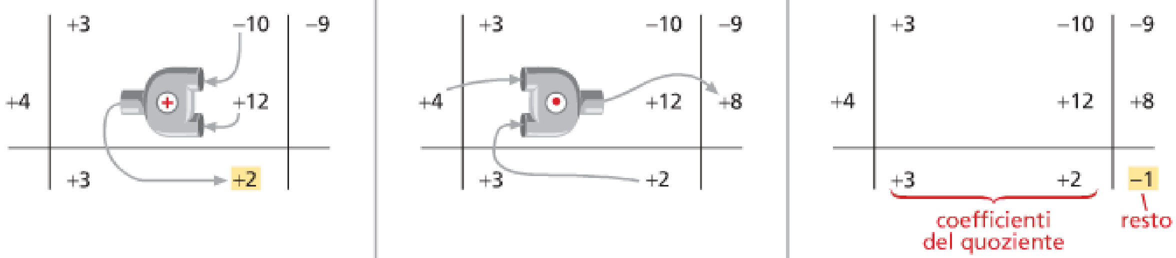
La figura 5 illustra come si applica la regola di Ruffini.



a. Scriviamo su una riga, nell'ordine, i coefficienti dei termini del polinomio dividendo, + 3 e − 10, e il termine noto − 9. Tracciamo due linee verticali, una a sinistra del primo coefficiente e una fra l'ultimo e il termine noto. Lasciamo una riga vuota e tracciamo una linea orizzontale.

b. A sinistra della prima linea verticale, sulla seconda riga, scriviamo + 4, ossia l'opposto del termine noto del polinomio divisore $x - 4$. Abbassiamo + 3, ossia il primo coefficiente del dividendo: esso è anche il primo coefficiente del quoziente.

c. Moltiplichiamo + 3 per + 4 e scriviamo il risultato nella colonna successiva a + 3, ossia sotto − 10.



d. Sommiamo − 10 e + 12 e scriviamo il risultato nella stessa colonna, sotto la linea orizzontale. + 2 è il secondo coefficiente del quoziente.

e. Ripetiamo il procedimento, moltiplicando + 2 per + 4 e scrivendo il risultato nella colonna a destra di + 2, sopra la riga orizzontale.

f. Sommiamo − 9 e + 8 e scriviamo il risultato nella stessa colonna, sotto la linea orizzontale: − 1 è il resto.

Scrittura del quoziente
I coefficienti del polinomio quoziente sono 3 e 2. Tenendo conto che il dividendo ha grado 2 e il divisore ha grado 1, il quoziente deve avere grado 1. Quindi possiamo scrivere:

$$Q = 3x + 2; \qquad R = -1.$$

Verifica
Per verificare che il risultato è esatto, possiamo controllare che sia valida l'uguaglianza $A = B \cdot Q + R$:

$$3x^2 - 10x - 9 = (x - 4)(3x + 2) + (-1).$$

Dividendo un polinomio $A(x)$ di grado n per il binomio $x - a$, di primo grado, otteniamo per quoziente un polinomio $Q(x)$ di grado $n - 1$.
Il resto è un polinomio di grado 0, cioè costituito solo dal termine noto.

Se il divisore è del tipo $x + a$, osserviamo che:

$$x + a = x - (-a).$$

ESEMPIO

$$(8x^2 + 2x - 3) : (x + 2) = (8x^2 + 2x - 3) : [x - (-2)].$$

Si può dunque applicare la regola di Ruffini.

Osservazione. Nella tabella costruita nella figura 5 abbiamo messo in riga i coefficienti del polinomio dividendo:

$$3x^2 - 10x - 9, \qquad \text{cioè} \qquad 3, -10 \text{ e } -9.$$

Se il polinomio dividendo fosse stato incompleto, al posto dei coefficienti mancanti avremmo dovuto inserire alcuni 0. Per esempio, per il polinomio dividendo $2x^4 - x^2 - 1$, i coefficienti da mettere in riga sono:

$$2, 0, -1, 0, -1.$$

Il teorema del resto

Eseguiamo mediante la regola di Ruffini la seguente divisione:

$$(5x^2 - 3x + 7) : (x - 2).$$

$$\begin{array}{r|rr|r} & +5 & -3 & +7 \\ +2 & & +10 & +14 \\ \hline & +5 & +7 & +21 \end{array}$$

Il resto della divisione è 21.

Calcoliamo il valore che assume il polinomio $5x^2 - 3x + 7$ per $x = 2$, cioè per x uguale all'opposto del termine noto del divisore:

$$5(2)^2 - 3(2) + 7 = 21.$$

Il resto della divisione coincide con il valore assunto dal polinomio per $x = 2$, cioè, nella formula generale, per $x = a$.

Il teorema di Ruffini

Esaminiamo il seguente ragionamento.

Se il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$, allora la divisione

$$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$$

dà resto 0; quindi, per il teorema del resto, $A(-5) = 0$.

Il ragionamento è invertibile.

Dato il polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, se $A(-5) = 0$, allora la divisione

$$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10) : (x + 5)$$

dà resto 0, per il teorema del resto; quindi $x^3 + 2x^2 - 13x + 10$ è divisibile per $x + 5$.

La regola di Ruffini con Excel

Esercizi sulla scomposizione in fattori mediante la regola di Ruffini

$4x^3 - 3x + 1$ [$(x+1)(2x-1)^2$]

$b^4 - 4b^3 - 2b^2 + 9b - 4$ [$(b-1)(b-4)(b^2+b-1)$]

$z^3 - 39z + 70$ [$(z-2)(z-5)(z+7)$]

$2a^3 + 5a^2 - 4a - 3$ [$(a-1)(a+3)(2a+1)$]

Altri esercizi a pag. 388 del libro di prima

Paolo Ruffini, nato nel 1765 vicino a Viterbo era laureato sia in matematica, sia in medicina. E' stato docente di matematica all'Università di Modena, ma contemporaneamente ha anche esercitato l'attività medica curando i meno abbienti, con generosa disponibilità, fino ad ammalarsi durante un'epidemia di tifo.
E' morto a Modena nel 1822: oltre alla sua regola, nota a tutti gli studenti,
Ruffini ci ha lasciato un bell'esempio di umanità!

Per approfondimenti sulla vita di Paolo Ruffini:
http://it.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini_(matematico)