Sul libro di prima – pag.436 e seguenti e pag. 483 e seguenti per gli esercizi

7. Le disuguaglianze numeriche

Scritture del tipo $5 > -2$ o $3 < 7$ indicano delle **disuguaglianze**.

Due disuguaglianze con lo stesso simbolo ($<$ o $>$) sono dello **stesso senso** (o dello **stesso verso**); altrimenti sono di **senso** (o di **verso**) **contrario**.

Anche nelle disuguaglianze, come nelle uguaglianze, il **primo membro** è l'espressione che sta a sinistra del simbolo di disuguaglianza e il **secondo membro** è l'espressione che sta a destra.

ESEMPIO

$-2 < 5$	e	$12 < 27$	sono dello stesso senso,
$-3 > -8$	e	$0 < 10$	sono di senso contrario.

Qualunque disuguaglianza può essere scritta usando il segno $<$ oppure il segno $>$. Per esempio, possiamo scrivere $7 < 8$ oppure $8 > 7$.

Le disuguaglianze numeriche godono di quattro proprietà fondamentali.

PROPRIETÀ

Monotonia dell'addizione

Aggiungendo uno stesso numero, positivo o negativo, a entrambi i membri di una disuguaglianza numerica si ottiene una disuguaglianza dello stesso senso.

ESEMPIO Consideriamo la disuguaglianza: $-9 < 5$.

Aggiungiamo $+10$ a entrambi i membri: $-9 + 10 < 5 + 10 \rightarrow 1 < 15$.

PROPRIETÀ

Moltiplicazione (divisione) per un numero

Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero:

- se è positivo, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso;
- se è negativo, si ottiene una disuguaglianza di verso contrario.

ESEMPIO

Data la disuguaglianza:	$2 < 5$,
moltiplichiamo per $+3$:	$2 \cdot 3 < 5 \cdot 3 \rightarrow 6 < 15$;
moltiplichiamo per -4:	$2 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4) \rightarrow -8 > -20$.

Dobbiamo cambiare il verso della disuguaglianza.

Caso particolare. Data la disuguaglianza $a < b$, se moltiplichiamo entrambi i membri per -1, otteniamo: $-a > -b$. Per esempio:

$9 > 4 \rightarrow -9 < -4$.

Possiamo quindi cambiare i segni nei due membri di una disuguaglianza, ma dobbiamo anche cambiare il verso.

8. Le disequazioni di primo grado

Consideriamo ora una disuguaglianza in cui compare una variabile, per esempio:

$$x - 3 < 5.$$

Procedendo per tentativi, attribuiamo alla lettera x alcuni valori e verifichiamo se la disuguaglianza che otteniamo è vera o falsa:

$x = 1$: $1 - 3 < 5$ vera, $x = 5$: $5 - 3 < 5$ vera,

$x = 8$: $8 - 3 < 5$ falsa, $x = 9$: $9 - 3 < 5$ falsa,

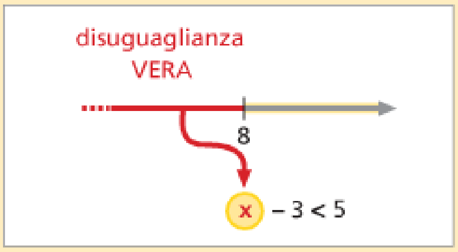
…

Come si può intuire, la disuguaglianza è vera per tutti i valori di x minori di 8, mentre è falsa per i valori di x maggiori o uguali a 8.

DEFINIZIONE

Disequazione

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si vuole stabilire quali valori di una o più lettere rendono la disuguaglianza vera.



Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera la disuguaglianza sono le **incognite** della disequazione.
Tutti i valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'**insieme delle soluzioni**. Di solito, cercheremo le soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Per esempio, nella disequazione $x - 3 < 5$ l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$, che per brevità indicheremo con: $x < 8$.

I simboli usati

Nelle disequazioni può comparire uno di questi simboli:

$<$ minore; $\leq$ minore o uguale;

$>$ maggiore; $\geq$ maggiore o uguale.

I simboli $\leq$ e $\geq$ indicano condizioni meno restrittive.

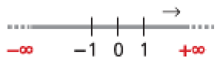
Per esempio, la disequazione $x + 4 \leq 6$ è verificata da tutti i numeri minori di 2 e anche dal numero 2, mentre la disequazione $x + 4 < 6$ è verificata soltanto da tutti i numeri minori di 2. In quest'ultimo caso il numero 2 non è soluzione della disequazione.

La rappresentazione delle soluzioni

Per rappresentare graficamente le soluzioni di una disequazione, possiamo utilizzare la retta orientata, i cui punti corrispondono ai numeri reali.

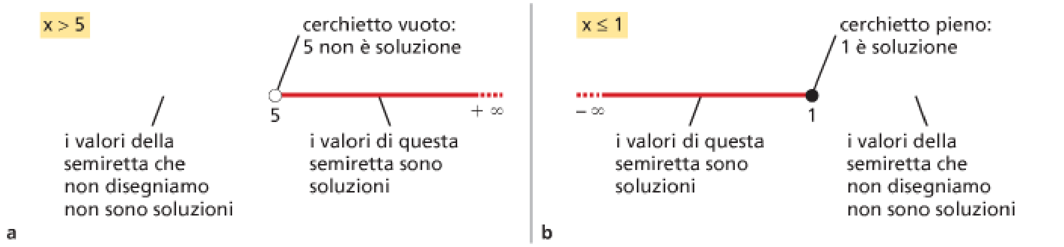
Sulla retta orientata faremo uso delle seguenti convenzioni:

- una *linea continua* rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione;
- *non disegniamo* le parti della retta che non corrispondono a soluzioni;
- un *cerchietto pieno* su un punto indica che il valore corrispondente è una soluzione;
- un *cerchietto vuoto* su un punto indica che il valore corrispondente **non** è una soluzione.



▲ **Figura 2** A ogni punto della retta corrisponde un numero reale e viceversa. I simboli $-\infty$ (meno infinito) e $+\infty$ (più infinito) non corrispondono ad alcun numero reale. Essi indicano soltanto che la retta è illimitata da entrambe le parti.

ESEMPIO Rappresentiamo graficamente le soluzioni $x > 5$ e $x \leq 1$.



▲ **Figura 3**

Spesso le soluzioni sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ costituiti da tutti i valori che precedono un certo numero, o da quelli che lo seguono, o dai valori compresi fra due numeri. Insiemi di questo tipo vengono detti **intervalli**. Parleremo quindi di **intervallo delle soluzioni**.

L'intervallo può essere indicato dalla coppia degli estremi, ordinati dal più piccolo al più grande, separati da un punto e virgola e racchiusi fra parentesi quadre. Per esempio, l'intervallo comprendente gli estremi a e b, con $a < b$, si indica $[a; b]$.

L'orientamento delle parentesi indica se gli estremi sono inclusi o esclusi:

$[a; b]$ estremi inclusi;

$]a; b[$ estremi esclusi;

$[a; b[$ estremo di sinistra incluso, estremo di destra escluso;

$]a; b]$ estremo di sinistra escluso, estremo di destra incluso.

ESEMPIO L'intervallo $x > 5$ si può rappresentare così:

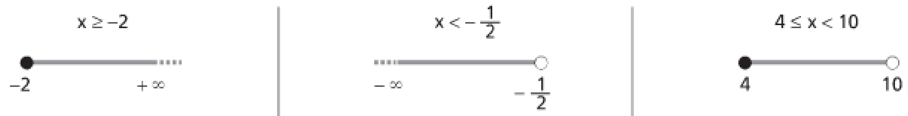
$]5; +\infty[$.

Infatti, sia 5 sia $+\infty$ sono esclusi.

$-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri, quindi, come estremi di intervalli, vanno **sempre esclusi**. L'intervallo $]-\infty; +\infty[$ è l'insieme $\mathbb{R}$.

Consideriamo, in ognuno degli esempi della figura 4, i tre modi di rappresentare le soluzioni della rispettiva disequazione.

▼ **Figura 4**



$[-2; +\infty[$

$]-\infty; -\frac{1}{2}[$

$[4; 10[$

a. -2 è compreso fra le soluzioni: sulla retta è rappresentato da un cerchietto pieno; la parentesi quadra è rivolta verso -2.

b. $-\frac{1}{2}$ non è la soluzione: sulla retta è rappresentato da un cerchietto vuoto; la parentesi è rivolta dalla parte opposta a $-\frac{1}{2}$.

c. La scrittura $4 \leq x < 10$ significa che devono essere contemporaneamente vere le due condizioni $4 \leq x$ e $x < 10$. Le soluzioni sono comprese fra 4 (incluso) e 10 (escluso).

ESEMPIO

$\left[1; \frac{3}{2}\right]$ è un intervallo chiuso; $]-1; 0[$ è un intervallo aperto;

$\left[\frac{1}{3}; 5\right[$ è un intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra;

$]-8; 0]$ è un intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra.

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

ESEMPIO

La disequazione

$$2x - 3 > x + 5$$

è equivalente alla disequazione

$$x - 3 > 5,$$

ottenuta aggiungendo $-x$ a entrambi i membri.

Nell'esempio, possiamo anche dire che il termine x è stato *trasportato* al primo membro, con il segno cambiato.

In generale, **un termine può essere trasportato da un membro all'altro di una disequazione, cambiandolo di segno**.

PRINCIPIO

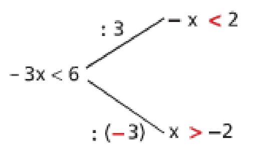
Secondo principio di equivalenza

Per trasformare una disequazione in una equivalente si può:

- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso numero positivo;
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per un numero negativo e cambiare il verso della disequazione.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il suo verso, si ottiene una disequazione equivalente.**

Questa operazione corrisponde alla moltiplicazione per -1 dei membri della disequazione. Per esempio, $-x < 2$ è equivalente a $x > -2$.



▲ **Figura 5** La disequazione $-3x < 6$ è equivalente sia alla disequazione $-x < 2$, ottenuta dividendo i due membri per 3, sia alla disequazione $x > -2$, ottenuta dividendo i due membri per -3 e cambiando il verso della disequazione.

ESERCIZI

Pag. 486 e seguenti

Risolvi le seguenti disequazioni numeriche intere.

537 $3x - 5 < -2$ $[x < 1]$

538 $4x - 3 > 5x + 1$ $[x < -4]$

539 $x - 2 < 7x$ $\left[x > -\frac{1}{3}\right]$

540 $7x - 2 > 3x - 1$ $\left[x > \frac{1}{4}\right]$

541 $5(x - 1) < 2(x - 3)$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

542 $2(x - 1) + 3(x - 2) < -7$ $\left[x < \frac{1}{5}\right]$

543 $4[2(1 - x) - 3] > 5x + 1$ $\left[x < -\frac{5}{13}\right]$

544 $\frac{1}{2}x - (1 + x) > \frac{3}{2}$ $[x < -5]$

545 $-x - \frac{1}{2} + \frac{x + 1}{2} > 0$ $[x < 0]$

546 $4x - 3 < -\frac{2}{3}x + 3$ $\left[x < \frac{9}{7}\right]$

547 $x - 4(x+2) \leq 2x - [x - (3 - 4x)]$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

548 $x\left(1 - \frac{1}{3}x\right) < -\frac{1}{3}x^2 + 2$ $[x < 2]$

549 $6x + 7 > \frac{1}{3}(9x - 3)$ $\left[x > -\frac{8}{3}\right]$

550 $\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) > 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ [impossibile]

551 $x - \frac{1}{3} < 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$ $\left[x > \frac{8}{3}\right]$

552 $3\left[(x+3) + \frac{1}{3}x\right] < 7x$ $[x > 3]$

553 $\frac{7x - 1}{2} > -\frac{2x + 1}{4}$ $\left[x > \frac{1}{16}\right]$

554 $\frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{3}(2 + x) < 0$ $[x < -2]$

555 $\frac{x - 3}{10} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) > \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\left[x < -\frac{9}{2}\right]$

556 $(x - 1)(x + 2) + (1 - x)(2x + 3) \leq 2 - x^2$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

557 $5(3 - 4x) + 14x - \frac{11}{6} < -10x - \frac{10}{3}\left(\frac{8x - 15}{20}\right)$ $[x < -2]$

558 $(x - 1)(x + 1) - (x - 3)^2 < 3$ $\left[x < \frac{13}{6}\right]$

559 $(x - 1)^2 - 3x < (x - 3)(x + 3)$ $[x > 2]$

560 $4(5x - 1) + 2(3x + 1)^2 > 3x(6x + 5) - 2x - 3$ $\left[x > -\frac{1}{19}\right]$

561 $(2x - 1)^2 - 3(2 + x) \leq (2x + 3)(2x - 3) + 2(x + 3)$ $\left[x \geq -\frac{2}{9}\right]$

562 $4(2x - 1) - x + (2x - 1)^2 > 4(x - 2)^2 - 12(x - 1)$ $[x > 1]$

563 $(3x - 1)(3x + 1) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 9x^2 < 0$ $\left[x < \frac{7}{6}\right]$

564 $x^2(2 - x) + (x - 2)^3 \leq -5(1 - 2x) + (2x + 1)(1 - 2x)$ $[x \leq 2]$

565 $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - (x + 1)^2 < -\left[1 - \left(\frac{2x + 1}{6}\right)\right] + \frac{1 + 2x}{3}$ $\left[x > -\frac{1}{16}\right]$

566 $\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}x\right)^2 < \frac{5}{9}x(x - 2) + \left(x - \frac{4}{9}x\right)4x$ [impossibile]

567 $\frac{(x - 1)(x + 1)}{2} + \left[\frac{x - 5}{4} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right] - \frac{(x - 3)^2}{2} > 0$ $\left[x > \frac{29}{11}\right]$

568 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right) + \left(3 - \frac{x}{2}\right)^2 < \frac{x^2}{4} + \frac{x - 1}{3} - \frac{2x + 5}{2} + 2$ $[x > 5]$

569 $\frac{4}{9}\left[x + \frac{3(x - 1)}{4}\right] + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$ $\left[x \leq \frac{1}{2}\right]$

570 $2(2x - 1)(2x + 1) - 6(x - 2)^2 \leq (x - 3)^2 - [3(3 + x)(3 - x) - 2(x + 1)(1 - x)]$ $\left[x \leq \frac{1}{3}\right]$

571 $3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) + (5x - 1)^2 < 9x\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + 40 + (5x + 1)^2$ $[x > -7]$

572 $\frac{1}{3}\left(9-\frac{3x}{2}\right)-\frac{2}{5}\left(\frac{15+5x}{2}\right)>(3-2x)^2-(2x+1)(2x-1)-6$ $\left[x>\frac{8}{21}\right]$

573 $(x+3)^3-4[x+5-(x+8)]^3>(x-3)^2(x+3)+12(x+1)^2$ $[x>-8]$

574 $(x-1)^3-(x+1)^3>2x-2-6x^2+2(x+1)(x-1)-2(x-2)^2$ $[x<1]$

575 $x^2-9<(x+3)(x-3)+2x$ $[x>0]$

576 $3(x-1)-1<\frac{x-2}{3}-\left(x-\frac{x-1}{3}\right)$ $\left[x<\frac{9}{10}\right]$

577 $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}\right)<\frac{1}{3}-2\left(x+\frac{1}{3}\right)$ $[x<0]$

578 $\frac{5}{2}x+\frac{2x-2}{3}-\frac{1-x}{3}-\left(\frac{3x+1}{2}+2x\right)\geq\frac{3}{2}$ [impossibile]

579 $\frac{2}{3}\left(x-2-\frac{x-1}{2}\right)\geq 1-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\left(x-\frac{x}{2}\right)+2\left(\frac{2}{3}x-1\right)$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

580 $4(x-3)^2>[6-(1-4x)]x-2$ $\left[x<\frac{38}{29}\right]$

581 $\frac{1}{4}(3x-5)+\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{3}-x\right)<\frac{2}{3}(x-7)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1+x}{4}\right)$ [impossibile]

582 $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{x^2-6x}{4}\geq\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-2$ $\left[x\geq-\frac{9}{4}\right]$

583 $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-\frac{1-2x}{3}\leq(1+x)^2-\left(1-\frac{3x-1}{6}\right)$ $\left[x\geq\frac{1}{34}\right]$

584 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)-x(x+2)\leq\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$ $[x\geq 0]$

585 $\left(\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)^{-1}-\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)^{-1}+x+1<0$ $\left[x<\frac{4}{9}\right]$

586 $\frac{1-x}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1-\frac{2x}{3}}{1+\frac{1}{3}}>7x+(1-x)^2-(x+1)(x-1)$ $\left[x<\frac{1}{28}\right]$

587 $(x-1)^3-(x+1)^3+6x\left(x-\frac{1}{2}\right)<(x-1)^2-(x+1)^2$ $[x<2]$

588 $\left[\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{4}x+1\right)^2+\left(1+\frac{1}{4}x\right)\left(-\frac{1}{4}x+1\right)\right]x+\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3-\left(\frac{3}{4}x^2-1\right)>0$ $\left[x>-\frac{4}{3}\right]$

589 $x(x-2)(x-3)-(1+x)(x-1)\geq\frac{3}{2}[(2x+1)^2-(2x-1)^2]-(2-x)^3$ $\left[x\leq\frac{1}{2}\right]$